CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 6	
Fonction logarithme décimal	***Le 30 mars 2023***

Exercice 1

1) $7^x = 9$ équivaut à $\log(7^x) = \log(9)$, c'est-à-dire à $x \times \log(7) = \log(9)$, ou encore à $x = \dfrac{\log(9)}{\log(7)}$. Par conséquent, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\log(9)}{\log(7)}\right\}$.

2) $3^x + 1 = 2188$ équivaut à $3^x = 2188 - 1 = 2187$, c'est-à-dire à $\log(3^x) = \log(2187)$, ou encore à $x \times \log(3) = \log(2187)$.

Or $x \times \log(3) = \log(2187)$ équivaut à $x = \dfrac{\log(2187)}{\log(3)} = 7$. Par conséquent, $\mathcal{S} = \{7\}$.

3) $11^x \geq 14\ 641$ équivaut à $\log(11^x) \geq \log(14\ 641)$, c'est-à-dire à $x \times \log(11) \geq \log(14\ 641)$ ou encore à $x \geq \dfrac{\log(14\ 641)}{\log(11)}$ (car $\log(11) > 0$). Par conséquent, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{\log(14\,641)}{\log(11)} ; +\infty\right[$.

4) $25 \times 0,6^x \geq 20$ équivaut à $0,6^x \geq \dfrac{20}{25}$ (car 25 est positif), soit à $0,6^x \geq 0,8$.

$0,6^x \geq 0,8$ équivaut à $\log\left((0,6)^x\right) \geq \log(0,8)$, c'est-à-dire à $x \times \log(0,6) \geq \log(0,8)$, ou encore à $x \leq \dfrac{\log(0,8)}{\log(0,6)}$ (car $\log(0,6) < 0$). Par conséquent, $\mathcal{S} = \left]0 ; \dfrac{\log(0,8)}{\log(0,6)}\right]$.

Exercice 2

1) Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 20 % est égal à $1 + \dfrac{20}{100}$, soit 1,2.

Or $0,5 \times 1,2 = 0,6$; d'où **le ficus mesurait 0,6 mètres au 1er janvier 2023**.

2) a) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times 1,2$.

Donc **la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $u_0 = 0,5$**.

b) Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n} = u_0 \times q^n = \boldsymbol{0,5 \times (1,2)^n}$.

3) On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 2,5$, c'est-à-dire tel que $0,5 \times (1,2)^n > 2,5$.

Or $0,5 \times (1,2)^n > 2,5$ équivaut à $(1,2)^n > \dfrac{2,5}{0,5}$ (car 0,5 est positif), soit à $(1,2)^n > 5$.

$(1,2)^n > 5$ équivaut à $\log\left((1,2)^n\right) > \log(5)$, c'est-à-dire à $n \times \log(1,2) > \log(5)$, ou encore à $n > \dfrac{\log(5)}{\log(1,2)}$ (car $\log(1,2) > 0$).

Comme $\dfrac{\log(5)}{\log(1,2)} \approx 8,8$, alors le plus petit entier n tel que $u_n > 2,5$ est $n = 9$.

Par conséquent, **le ficus dépassera la hauteur du plafond à partir de 2031**.