DEVOIR MAISON N° 7

Fonction exponentielle, fonction logarithme décimal	***Pour le 6 avril 2023***

1) f est une fonction exponentielle avec $3 > 0$ et $0 < 0,86 < 1$, alors **la fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 8]$**.

2) $\dfrac{f(t+2)}{f(t)} = \dfrac{\cancel{3} \times (0,86)^{t+2}}{\cancel{3} \times (0,86)^{t}} = (0,86)^{t+2-t} = (0,86)^2 = 0,7396$.

Donc, **pour tout réel t de $[0\ ;\ 6]$, $\dfrac{f(t+2)}{f(t)} = 0,7396$**.

Comme $100 \times (0,7396 - 1) = -26,04$, alors **la quantité de médicament dans le sang diminue de 26,04 % toutes les deux heures**.

3) a) $f(t) \leq 1,5$ équivaut à $3 \times (0,86)^t \leq 1,5$, c'est-à-dire à $(0,86)^t \leq \dfrac{1,5}{3}$ car 3 est positif, ou encore à $(0,86)^t \leq 0,5$.

Or $(0,86)^t \leq 0,5$ équivaut à $\log\left((0,86)^t\right) \leq \log(0,5)$, c'est-à-dire à $t \times \log(0,86) \leq \log(0,5)$.

Comme $0 < 0,86 < 1$, alors $\log(0,86) < 0$. D'où $t \times \log(0,86) \leq \log(0,5)$ équivaut à $t \geq \dfrac{\log(0,5)}{\log(0,86)}$. Par conséquent, **l'inéquation $f(t) \leq 1,5$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[\dfrac{\log(0,5)}{\log(0,86)}\ ;\ 8\right]$**.

b) La quantité de médicament présente dans le sang à l'instant $t = 0$ est égale à $f(0) = 3 \times (0,86)^0 = 3$ cm³. Elle aura donc diminué de moitié lorsque $f(t) \leq 1,5$.

D'après la question 3) a), **le temps recherché est donc de $\dfrac{\log(0,5)}{\log(0,86)}$, soit environ 4,6 heures**.

Or 0,6 heure correspond à $0,6 \times 60 = 36$ minutes ; donc **la quantité de médicament dans le sang diminue de moitié au bout de 4 heures et 36 minutes**.

4) Au bout d'une heure et demie, la quantité de médicament présente dans le sang du malade s'élève à 4,2 cm³. Par suite, $g(1,5) = 4,2$, c'est-à-dire $5 \times a^{1,5} = 4,2$.

Or $5 \times a^{1,5} = 4,2$ équivaut à $a^{1,5} = \dfrac{4,2}{5}$, c'est-à-dire à $a^{1,5} = 0,84$.

$a^{1,5} = 0,84$ équivaut à $\log\left(a^{1,5}\right) = \log(0,84)$, c'est-à-dire à $1,5 \times \log(a) = \log(0,84)$, ou encore à $\log(a) = \dfrac{\log(0,84)}{1,5}$.

Or $\log(a) = \dfrac{\log(0,84)}{1,5}$ équivaut à **$a = 10^{\frac{\log(0,84)}{1,5}} \approx 0,89$**