CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Calcul intégral	Le 9 mai 2023

Exercice 1

1) $A=\int_1^6 x^5\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{5+1}x^{5+1}\right]_1^6=\left[\frac{1}{6}x^6\right]_1^6=\frac{6^6}{6}-\frac{1^6}{6}=\mathbf{\frac{46\,655}{6}}$.

2) $B=\int_1^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\ln(t)\right]_1^2=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)-0=\mathbf{\ln(2)}$.

3) $C=\int_0^2\frac{3t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^2\frac{3}{2}\times\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^2=\frac{3}{2}\ln(5)-\frac{3}{2}\ln(1)=\mathbf{\frac{3}{2}\ln(5)}$.

Exercice 2

1) Si $0\leq x\leq 1$ alors $1-0\geq 1-x\geq 1-1$ car la fonction $x\mapsto 1-x$ est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.

Par suite, $0\leq 1-x\leq 1$. Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**, d'où $e^0\leq e^{1-x}\leq e^1$.

De plus $x^n\geq 0$ pour tout x de $[0\,;\,1]$; par conséquent, **pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $x^n\leq x^n e^{1-x}\leq x^n e$**.

2) D'après la question précédente, et comme les fonctions $x\mapsto x^n$, $x\mapsto ex^n$ et $x\mapsto x^n e^{1-x}$ sont continues sur $[0\,;\,1]$, on en déduit que : $\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^n e\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire

$\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x\leq e\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$.

Or $\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$; par suite, $\mathbf{\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{e}{n+1}}$.

3) D'après la question précédente, et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0}$.

Exercice 3

1) a) **Pour tout réel x, $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$** $=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-2\times e^{\frac{x}{2}}\times 1+1^2=\mathbf{e^x-2e^{\frac{x}{2}}+1}$.

b) Étudions le signe de $f(x)-g(x)$ sur **R**.

$f(x)-g(x)=e^x-\left(2e^{\frac{x}{2}}-1\right)=e^x-2e^{\frac{x}{2}}+1=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$ d'après la question précédente.

$e^{\frac{x}{2}}-1=0$ équivaut à $e^{\frac{x}{2}}=1$, c'est-à-dire à $x=0$.

Et, pour tout réel x différent de 0, $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2>0$.

On en déduit que **$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur R, et se coupent au point de coordonnées $(0\,;\,1)$**.

2) Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

D'après la question 1) b), on en déduit que : $\mathscr{A}=\int_0^1 (f(x)-g(x))\ \mathrm{d}x$.

Or $\int_0^1 (f(x)-g(x))\ \mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$; d'où $\mathscr{A}=\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x-\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$.

$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x=\left[e^x\right]_0^1=e^1-e^0=e-1$

$\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x=\left[4e^{\frac{x}{2}}-x\right]_0^1=\left(4e^{0,5}-1\right)-\left(4e^0-0\right)=4\sqrt{e}-5$

Par suite, $\mathscr{A}=e-1-4\sqrt{e}+5=e-4\sqrt{e}+4$. Par conséquent, **$\mathscr{A}$ est égale à $e-4\sqrt{e}+4$ u.a.**

Exercice 4

1) $\boldsymbol{I}=\int_0^4 \frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^4=\frac{1}{2}\ln(17)-\frac{1}{2}\ln(1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(17)}$.

2) a) $I+J=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x=\int_0^4 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_0^4 \frac{x+x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^4 \frac{x\left(1+x^2\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

D'où : $\boldsymbol{I+J}=\int_0^4 x\mathrm{d}x==\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=\frac{16}{2}-\frac{0}{2}\boldsymbol{=8}$.

b) D'après les questions précédentes, on en déduit que : $\boldsymbol{J}=8-I\boldsymbol{=8-\frac{1}{2}\ln(17)}$.

Exercice 5

On pose : $u(x)=\ln(x)$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$

Alors : $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\ln(x)$

En intégrant par parties, on obtient :

$I=\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\left[\ln(x)\times\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2 \frac{1}{x}\times\ln(x)\mathrm{d}x=(\ln(2))^2-(\ln(1))^2-I$.

D'où : $2I=(\ln(2))^2$. Par conséquent, $\boldsymbol{I=\frac{1}{2}(\ln(2))^2}$.

Exercice 6

1) **Une primitive F de la fonction f sur $[0\ ;100]$ est définie par**

$\boldsymbol{F(x)}=x^2-x+\frac{1}{0,05}e^{0,05x}\boldsymbol{=x^2-x+20e^{0,05x}}$.

2) $\mu=\frac{1}{100-0}\times\int_0^{100} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{100}\times\left[F(x)\right]_0^{100}=\frac{1}{100}\times(F(100)-F(0))$.

Or $F(100)=100^2-100+20e^5=9\ 900+20e^5$ et $F(0)=0^2-0+20e^0=20$.

Donc $\boldsymbol{\mu=98,80+e^5}$.

3) $\mu\approx 128,48$.

Donc **le coût moyen de fabrication des semoirs est d'environ 12 848 €**.