

DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Calcul intégral

Le 9 mai 2023

Le plus grand soin doit être apporté aux calculs et à la rédaction.
Soulignez ou encadrez vos résultats.

Exercice 1 (3 points)

Calculer les intégrales suivantes en justifiant.

$$A = \int_1^6 x^5 dx \quad ; \quad B = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \quad ; \quad C = \int_0^2 \frac{3t}{t^2 + 1} dt.$$

Exercice 2 (4 points)

Soient $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- 1) Démontrer que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
- 2) En déduire un encadrement de I_n .
- 3) La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice 3 (4 points)

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1) a) Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$.

b) Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

2) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 (4 points)

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ et $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

1) Calculer $I = \int_0^4 f(x) dx$.

2) Soit $J = \int_0^4 g(x) dx$.

- a) Calculer $I + J$.
- b) En déduire J .

Exercice 5 (2 points)

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Exercice 6 (3 points)

Une entreprise agricole envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole).

On admet que la fonction f , définie sur $[0 ; 100]$ par $f(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$, modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.



- 1) Donner une primitive F de la fonction f sur $[0 ; 100]$.
- 2) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0 ; 100]$.
- 3) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

