# CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 7

| | |
|---|---|
| ***Primitives, équations différentielles, fonction exponentielle, fonction ln*** | ***Le 4 avril 2023*** |

## Exercice 1

$f$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\ ;+\infty[$ si, pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x)=\ln(x)$.

Or $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1$.

Donc **$f$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\ ;+\infty[$**.

## Exercice 2

1) $G(x)=-3\times\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}+5\times\dfrac{1}{1+1}x^{1+1}-2x=\boldsymbol{-x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x}$.

2) $g(x)=\dfrac{3}{2x+1}$. Posons $u(x)=2x+1$, alors $u'(x)=2$. Ainsi $1=\dfrac{1}{2}u'(x)$, et, par suite,

$g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}u'(x)\times3}{u(x)}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Par conséquent, $G(x)=\dfrac{1}{2}\times\ln(u(x))=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\ln(2x+1)}$.

3) $g(x)=e^{5x-3}$. Posons $u(x)=5x-3$, alors $u'(x)=5$. Par suite, $g(x)=\dfrac{1}{5}\times u'(x)e^{u(x)}$.

Par conséquent, $G(x)=\dfrac{1}{5}e^{u(x)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}e^{5x-3}}$.

4) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$. Posons $u(x)=x-2$, alors $u'(x)=1$. Par suite,

$g(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}=2\times\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Par conséquent, $\boldsymbol{G(x)=2\sqrt{x-1}}$.

## Exercice 3

### Partie A

1) $f(0{,}5)=35e^{-1{,}6\times0{,}5}-30\approx-14{,}3$. Donc **la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes est d'environ $-14{,}3$ °C**.

2) On a $f=35e^{u}-30$ avec $u(t)=-1{,}6t$. D'où $f'=35u'e^{u}-0$ avec $u'(t)=-1{,}6$.
Donc, pour réel $t$ de $[0\ ;+\infty[$, $f'(t)=35\times(-1{,}6)\times e^{-1{,}6t}=-56\times e^{-1{,}6t}$.
Comme $-56<0$ et $e^{-1{,}6t}>0$ pour tout réel $t$, alors pour réel $t$ de $[0\ ;+\infty[$, $f'(t)<0$.
Par conséquent, **la fonction $f$ est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$**.

3) $f(1{,}5)=35e^{-1{,}6\times1{,}5}-30\approx-27$. Or pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à −24 °C.
Donc **la température des ailerons sera conforme au cahier des charges**.

4) $f(t)=-24$ équivaut à $35e^{-1{,}6t}-30=-24$, c'est-à-dire à $35e^{-1{,}6t}=-24+0=6$, ou encore à $e^{-1{,}6t}=\dfrac{6}{35}$.

Or $e^{-1,6t}=\frac{6}{35}$ équivaut à $\ln\left(e^{-1,6t}\right)=\ln\left(\frac{6}{35}\right)$, c'est-à-dire à $-1,6t=\ln\left(\frac{6}{35}\right)$, soit à $t=\frac{\ln\left(\frac{6}{35}\right)}{-1,6}$.

Donc **l'équation $f(t)=-24$ admet pour solution $t=\frac{\ln\left(\frac{6}{35}\right)}{-1,6}$**.

Comme $\frac{\ln\left(\frac{6}{35}\right)}{-1,6}\approx 1,10$, alors **les ailerons de poulet atteignent la température de $-24$ °C au bout de 1,10 h, soit 1 h et 6 min**.

## Partie B

1) $y'+1,5y=-52,5$ équivaut à $y'=-1,5y-52,5$.
Cette équation différentielle est de la forme $y'=ay+b$ avec $a=-1,5$ et $a=-52,5$.

Donc **les solutions de (E) sont définies par $g_k(t)=ke^{-1,5t}-\frac{b}{a}=ke^{-1,5t}-35$, où $k$ est une constante.**

2) a) A l'instant $t=0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel.
Donc $\boldsymbol{g(0)=5}$.

b) $g(0)=5$ équivaut à $ke^{-1,5\times 0}-35=5$, c'est-à-dire à $k=5+35=40$.
Par conséquent, **pour tout réel $t$ positif, $g(t)=40e^{-1,5t}-35$**.

3) $g(t)=-24$ équivaut à $40e^{-1,5t}-35=-24$, c'est-à-dire à $40e^{-1,5t}=-24+35=11$, ou encore à $e^{-1,5t}=\frac{11}{40}$.

Or $e^{-1,5t}=\frac{11}{40}$ équivaut à $\ln\left(e^{-1,5t}\right)=\ln\left(\frac{11}{40}\right)$, c'est-à-dire à $-1,5t=\ln\left(\frac{11}{40}\right)$, soit à $t=\frac{\ln\left(\frac{11}{40}\right)}{-1,5}$.

Comme $\frac{\ln\left(\frac{11}{40}\right)}{-1,5}\approx 0,86$ et que $0,86\times 60\approx 52$, alors les ailerons de poulet atteignent la température de −24 °C au bout de 52 min.
Par conséquent, **ce nouveau tunnel permet une congélation plus rapide**.