CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 9

Équations différentielles et fonction exponentielle	*Pour le 13 avril 2023*

1) Soit t un réel positif, et soit la fonction $g=\ln(f)$. Comme f est dérivable et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, alors $g'=\dfrac{f'}{f}$. D'où :

$$g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20} \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{1}{20}\ln(f(t))-\frac{3}{20}$$
$$\Leftrightarrow f'(t)=\frac{1}{20}f(t)\left[\ln(f(t))-3\right]$$
$$\Leftrightarrow f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln(f(t))\right]$$

Par conséquent, **une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t)=-\dfrac{1}{20}f(t)\left[3-\ln(f(t))\right]$ si, et seulement si, la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\dfrac{1}{20}g(t)-\dfrac{3}{20}$**.

2) L'équation différentielle (H) est de la forme $z'=az+b$ avec $a=\dfrac{1}{20}$ et $b=-\dfrac{3}{20}$.

Alors $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}}=\dfrac{3}{20}\times 20=3$. Donc **les solutions de l'équation différentielle (H) sont les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $t\mapsto ke^{\frac{1}{20}t}+3$ où k est une constante réelle**.

3) D'après la question 1), la fonction g est une solution de (H) ; alors, d'après la question précédente, on en déduit que $g(t)=ke^{\frac{t}{20}}+3$, avec k une constante réelle. Or $g=\ln(f)$, alors **il existe un réel k tel que pour tout t de $[0\,;+\infty[$: $f(t)=e^{3+ke^{\frac{t}{20}}}$** .

4) L'effectif initial est égal à 1 000 ; par suite, $f(0)=1$.

D'où $e^{3+ke^{\frac{0}{20}}}=1$, c'est-à-dire $e^{3+k}=1$. Donc $3+k=\ln(1)=0$, c'est-à-dire $k=-3$.

Par conséquent, **pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f(t)=e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}$** .

5) a) $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t}{20}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{t}{20}}=+\infty$ (limite d'une fonction composée).

On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(3-3e^{\frac{t}{20}}\right)=-\infty$ (par produit et somme de limites).

Or $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$. Par conséquent, $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}=0$ (limite d'une fonction composée), c'est-à-dire **$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$**.

b) D'après le 1), $f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln(f(t))\right]$. Or $\ln(f(t))=\ln\left[e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}\right]=3-3e^{\frac{t}{20}}$.

D'où : $f'(t)=-\frac{1}{20}e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}\left[3-3+3e^{\frac{t}{20}}\right]=-\frac{3e^{\frac{t}{20}}}{20}e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}$.

Comme $e^{\frac{t}{20}}$ et $e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}$ sont strictement positifs pour tout t de $[0\ ;+\infty[$, alors $f'(t)<0$ pour tout réel t positif.
Par conséquent, **la fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$**.

c) $f(t)<0{,}02<0{,}02 \quad\Leftrightarrow\quad e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}<0{,}02$

$\Leftrightarrow\quad 3-3e^{\frac{t}{20}}<\ln(0{,}02)$ car la fonction ln est strictement croissante

$\Leftrightarrow\quad -3e^{\frac{t}{20}}<\ln(0{,}02)-3$

$\Leftrightarrow\quad e^{\frac{t}{20}}>\frac{\ln(0{,}02)-3}{-3}$

$\Leftrightarrow\quad \frac{t}{20}>\ln\left(\frac{\ln(0{,}02)-3}{-3}\right)$

$\Leftrightarrow\quad t>20\times\ln\left(\frac{3-\ln(0{,}02)}{3}\right)$

Donc $\mathcal{S}=\left]20\times\ln\left(\frac{3-\ln(0{,}02)}{3}\right);+\infty\right[$.

Or $20\times\ln\frac{3-\ln(0{,}02)}{3}\approx 16{,}69$; par conséquent, **la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus au bout de 17 ans, selon ce modèle**.