DEVOIR MAISON N° 9	
Équations différentielles et fonction exponentielle	***Pour le 13 avril 2023***

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.
En 2020, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1 000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2020).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ et satisfait l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{1}{20}y\left(3-\ln(y)\right)$.

1) Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\left(f(t)\right)\right]$ si, et seulement si, la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$.

2) Donner la solution générale de l'équation différentielle (H) : $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$.

3) En déduire qu'il existe un réel k tel que pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$: $f(t) = e^{3+ke^{\frac{t}{20}}}$.

4) En déduire que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t)=e^{3-3e^{\frac{t}{20}}}$.

5) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c) Résoudre, dans $[0\ ;\ +\infty[$, l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?