DEVOIR MAISON N° 5

Suites, algorithme de Héron	***Pour le 29 novembre 2022***

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ (❄).

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

a) Déterminer les variations de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f admet un minimum.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n > \sqrt{2}$.

2) a) Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c) On déduit de la relation (❄) que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$.

Déterminer ℓ.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{u_n}$.

4) On définit la suite (d_n) par $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = \frac{1}{2}{d_n}^2$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{2} \leq d_n$.

b) Voici un algorithme écrit en Python :

```
def resultat(p) :
    d=1
    n=0
    while d>10**(-p):
        d=0.5*d**2
        n=n+1
    return n
```

En entrant la valeur 3, l'algorithme affiche le nombre 4. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_4 ?

Justifier que u_4 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.