CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4

Suites, dérivation	***Pour le 17 novembre 2022***

1) a) On a : $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=2x^2-3$ et $v(x)=3x-4$.

D'où : $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=2\times 2x=4x$ et $v'(x)=3$.

Alors $f'(x)=\dfrac{4x\times(3x-4)-(2x^2-3)\times 3}{(3x-4)^2}=\dfrac{12x^2-16x-6x^2+9}{(3x-4)^2}$.

Pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$, $f'(x)=\dfrac{6x^2-16x+9}{(3x-4)^2}$.

b) Comme $(3x-4)^2>0$ pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $6x^2-16x+9$.

$\Delta=(-16)^2-4\times 6\times 9=40$; comme $\Delta>0$, ce trinôme du second degré admet deux racines :

$x_1=\dfrac{16-\sqrt{40}}{12}=\dfrac{16-2\sqrt{10}}{12}=\dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$ et $x_2=\dfrac{16+\sqrt{40}}{12}=\dfrac{16+2\sqrt{10}}{12}=\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$. De plus, $a=6>0$; on en déduit donc :

x	$-\infty$		$\dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$		$\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$		$+\infty$
$6x^2-16x+9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, on obtient :

x	$-\infty$		x_1		$\dfrac{4}{3}$		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

2) a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbb{N}$, $3\leq u_{n+1}\leq u_n$ »

$\rightarrow$ *Initialisation* : Comme $u_0=5$ et $u_1=f(u_0)=\dfrac{47}{11}$, alors on a bien $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

$\rightarrow$ *Hérédité* : Soit $n\geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $3\leq u_{n+1}\leq u_n$.

Comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}\,;+\infty\right[$, alors

$f(3)\leq f(u_{n+1})\leq f(u_n)$. Or $f(3)=\dfrac{2x^2-3}{3x-4}=\dfrac{2\times 9-3}{3\times 3-4}=\dfrac{15}{5}=3$; d'où $3\leq u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$\rightarrow$ La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n, soit : $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$** .

b) D'après la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 3. Par conséquent, **(u_n) converge vers un réel ℓ**.

c) On suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ qui vérifie la relation $f(\ell) = \ell$.

$\ell = \dfrac{2\ell^2 - 3}{3\ell - 4}$ équivaut à $3\ell^2 - 4\ell = 2\ell^2 - 3$, c'est-à-dire à $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$; alors cette équation à deux solutions $\ell_1 = \dfrac{4 - \sqrt{4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $\ell_2 = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Comme (u_n) est minorée par 3, alors **la valeur de ℓ est 3**.

3) Si on avait $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2 \times 1 - 3}{3 \times 1 - 4} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, et ainsi de suite, on aurait : **pour tout n entier naturel, $u_n = 1$**.