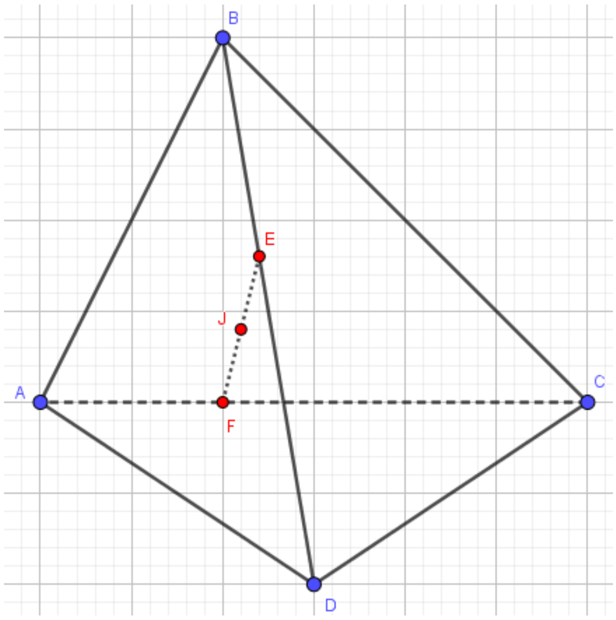
CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3	
Vecteurs, droites et plans de l'espace, barycentres	***Pour le 7 novembre 2022***



1) Le point J appartient aux plans (ABJ) et (CDJ). Les deux plans sont donc sécants ou confondus. S'ils étaient confondus, alors A, B, C et D seraient coplanaires et $ABCD$ serait un quadrilatère, ce qui est absurde puisque $ABCD$ est un tétraèdre.
Les plans (ABJ) et (CDJ) sont donc sécants selon une droite Δ.

2) La droite Δ est coplanaire avec la droite (AB). Si Δ est parallèle à (AB), alors la droite parallèle à Δ et (AB) passant par le point C appartient aux plans (JDC) et (ABC) ; ce qui est absurde car le point D est non coplanaire avec les points A, B et C. **La droite Δ coupe donc la droite (AB)**. De la même manière, **on démontre que Δ coupe (CD)**.

3) a) $3\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{ED}=3\overrightarrow{EB}+2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}\right)=5\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{BD}=5\times\left(-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}\right)+2\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BD}$

Donc $\mathbf{3\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{ED}=\vec{0}}$.

b) D'après la question précédente, on en déduit que $\overrightarrow{EB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$. Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires ; par suite, **les points E, B et D sont alignés**.

4) Afin de montrer que F est le barycentre des points $(A,\ 2)$ et $(C,\ 1)$, il suffit de prouver l'égalité $2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$.
Or $2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=3\times\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Par conséquent, ***F*** **est le barycentre des points $(A,\ 2)$ et $(C,\ 1)$**.

5) a) Comme J est le milieu de $[EF]$, alors $\mathbf{\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{JF}}$.

b) D'après la question précédente, $\overrightarrow{JF}-\overrightarrow{EJ}=\vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{JE}=\vec{0}$.
Par conséquent, ***J*** **est le barycentre des points $(E,\ 1)$ et $(F,\ 1)$**.

6) a) Comme $2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$, alors $10\overrightarrow{FA}+5\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ et $10+5=15\neq 0$. On en déduit que F est

le barycentre des points $(A,\ 10)$ et $(C,\ 5)$.

Comme $3\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{ED}=\vec{0}$, alors $9\overrightarrow{EB}+6\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ et $9+6=15\neq 0$. On en déduit que E est le barycentre des points $(B,\ 9)$ et $(D,\ 6)$.

D'après la propriété du barycentre partiel, le barycentre des points $(A,\ 10)$, $(B,\ 9)$, $(C,\ 5)$ et $(D,\ 6)$ est le barycentre des points $(F,\ 15)$ et $(E,\ 15)$.

Or, d'après la question 5) b), J est le barycentre des points $(E,\ 1)$ et $(F,\ 1)$, c'est-à-dire des points $(F,\ 15)$ et $(E,\ 15)$.

Par conséquent, ***J* est le barycentre des points $(A,\ 10)$, $(B,\ 9)$, $(C,\ 5)$ et $(D,\ 6)$**.

b) A, B, C et D forment un tétraèdre donc D n'est pas dans le plan (ABC).

Donc ***A*, *B*, *C*, *D* et *J* ne peuvent pas être coplanaires**.

c) Le barycentre des points $(A,\ 10)$, $(B,\ 9)$, $(C,\ 5)$ et $(D,\ 6)$ est le point J et il est unique.

Si G est le barycentre des points $(A,\ 10)$ et $(B,\ 9)$, et H le barycentre des points $(C,\ 5)$ et $(D,\ 6)$, alors d'après la propriété du barycentre partiel, ***J* est le barycentre des points $(G,\ 10+9)$ et $(H,\ 5+6)$, c'est-à-dire des points $(G,\ 19)$ et $(H,\ 11)$**.

d) D'après la question précédente, on en déduit que $19\overrightarrow{JG}+11\overrightarrow{JH}=\vec{0}$.

Or $19\overrightarrow{JG}+11\overrightarrow{JH}=\vec{0}$ équivaut à $19\overrightarrow{JG}=-11\overrightarrow{JH}$, ou encore à $\boldsymbol{\overrightarrow{JG}=-\frac{11}{19}\overrightarrow{JH}}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JH}$ sont donc colinéaires et, ainsi, que les points J, G et H sont alignés. On en déduit que le point G appartient à la droite (JH).

Or J appartient à Δ et, H appartient à (DC), alors H appartient à (JDC). On en déduit que la droite (JH) est incluse dans le plan (JDC). Par suite, le point G appartient au plan (JDC).

De la même manière on démontre que le point H appartient au plan (ABJ).

Les points H et G appartiennent alors aux plans (ABJ) et (JDC).

Par conséquent, **la droite (HG) est donc la droite Δ**.