

DEVOIR MAISON N° 2

**Probabilités conditionnelles,
loi binomiale**

Pour le 29 septembre 2022

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie A

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- \bar{A} et \bar{T} sont respectivement les évènements contraires de A et T .

1) Calculer $p(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2) Démontrer que $p(T) = 0,2625$.

3) On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.

4) a) Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\bar{A} \cap T$, $A \cap \bar{T}$, $\bar{A} \cap \bar{T}$.

b) On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».

Démontrer que $p(E) = 0,0625$.

Partie B

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.

On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1) On suppose que $n = 50$.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $p(X = 7)$.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.

2) Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $p(X \geq 10)$ soit supérieure à 0,95 ?