CORRECTION DU BAC BLANC

Terminale S	Le 14 février 2019

Exercice 1

1) $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Par suite, $(1+i)^4=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{\pi}{4}\times 4}=4e^{i\pi}$.

La réponse correcte est donc la « b ».

2) $|z-1+i|=\left|\sqrt{3}-i\right|$ équivaut à $|z-1+i|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$.

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre Ω d'affixe $1-i$, c'est-à-dire de coordonnées $(1\,;-1)$, et de rayon 2. Or ce cercle a pour équation $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=2^2$.

La réponse correcte est donc la « c ».

3) $u_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\frac{1+i}{2}z_n\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $-1<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.

La réponse correcte est donc la « c ».

4) $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(1+5i)-(-1-i)}{(2-2i)-(-1-i)}=\frac{2+6i}{3-i}=\frac{2i(3-i)}{3-i}=2i$.

Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$; **la réponse correcte est donc la « c »**.

5) $\Delta=(2a)^2-4\left(a^2+1\right)=-4$; comme $\Delta<0$, l'équation $z^2+2az+a^2+1=0$ admet deux solutions complexes conjuguées. Or deux nombres complexes conjugués ont le même module, donc **la réponse correcte est la « c »**.

6) $z=1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Comme $\theta\in\left]0\,;\pi\right[$, alors $\frac{\theta}{2}\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$. On en déduit que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est le module de z et $\frac{\theta}{2}$ est un argument de z.

La réponse correcte est donc la « d ».

Exercice 2 (*Polynésie, septembre 2017*)

Partie A :

1) $u_1=0{,}9u_0(1-u_0)=0{,}9\times 0{,}3\times 0{,}7=0{,}189$; **le nombre de tortues au début de l'année 2001 est 189**.

$u_2=0{,}9u_1(1-u_1)=0{,}9\times 0{,}189\times(1-0{,}189)\approx 0{,}138$; **le nombre de tortues au début de l'année 2001 est 138**.

2) a) On sait que, pour tout entier naturel n, $0\le 1-u_n\le 1$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.

Comme $u_n \geq 0$, alors $0 \leq u_n(1-u_n) \leq u_n$.
De plus, $0,9 > 0$; alors on en déduit que $0 \leq 0,9u_n(1-u_n) \leq 0,9u_n$.
Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$**.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$, alors on a bien $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
On sait que $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$ et $0 \leq 0,9u_n \leq 0,3 \times 0,9^n \times 0,9$.
Par suite, $0 \leq u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^n \times 0,9$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$
On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

→ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n, soit : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$**.

c) Comme $-1 < 0,9 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.
D'après la question précédente et le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

3)

$u \leftarrow 0,3$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geq 0,03$ faire :
$\quad n \leftarrow n+1$
$\quad u \leftarrow 0,9u(1-u)$
Fin du tant que

Partie B :

1) $v_{11} = 1,06v_{10}(1-v_{10}) = 1,06 \times 0,032 \times (1-0,032) \approx 0,033$; **il y aura donc 33 tortues au début de l'année 2011**.

$v_{12} = 1,06v_{11}(1-v_{11}) = 1,06 \times 0,033 \times (1-0,033) \approx 0,034$; **il y aura donc 34 tortues au début de l'année 2012**.

2) On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente vers un réel ℓ.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-v_n) = 1-\ell$, et par suite, que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,06v_n(1-v_n) = 1,06\ell(1-\ell)$ (par produit de limites).
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.
Comme $v_{n+1} = 1,06v_n(1-v_n)$ et d'après l'unicité de la limite, on en déduit que $\ell = 1,06\ell(1-\ell)$.

3) $\ell = 1,06\ell(1-\ell)$ équivaut à $\ell - 1,06\ell(1-\ell) = 0$, c'est-à-dire à $\ell(1-1,06(1-\ell)) = 0$, ou encore à $\ell(1,06\ell - 0,06) = 0$.
Or $\ell(1,06\ell - 0,06) = 0$ équivaut à $\ell = 0$ ou $1,06\ell - 0,06 = 0$, c'est-à-dire
$\ell = \dfrac{0,06}{1,06} = \dfrac{2}{53} \approx 0,057$.

Comme la suite (v_n) est croissante et que $v_{10} > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{2}{53}$.

On en déduit qu'à long terme, il y aura 57 tortues. **La population de tortues ne sera donc plus en voie d'extinction**.

Exercice 3 *(Liban, juin 2017)*

L'abscisse du point A_k est la valeur qui annule la dérivée de la fonction f_k.

La fonction f_k est dérivable sur **R** en tant que somme de fonctions dérivables sur **R**.

Pour tout réel x, $f_k'(x) = 1 - ke^{-x}$.

Or $f_k'(x) = 0$ équivaut à $1 - ke^{-x} = 0$, c'est-à-dire à $e^{-x} = \dfrac{1}{k}$ car k est un réel non nul.

Par suite, $f_k'(x) = 0$ équivaut à $-x = \ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = -\ln(k)$, c'est-à-dire à $x = \ln(k)$.

De plus, $f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)} = \ln(k) + k \times \dfrac{1}{k} = 1 + \ln(k)$.

Par conséquent, pour tout réel k strictement positif, le point A_k a pour coordonnées $(\ln(k)\ ;\ 1 + \ln(k))$ et appartient donc à la droite d'équation $y = x + 1$

Par conséquent, **pour tout réel k strictement positif, les points A_k sont alignés**.

Exercice 4 *(Métropole, juin 2018)*

1) La « largeur » de l'arc de chaînette est égale à $x - (-x) = 2x$.

La « hauteur » de l'arc de chaînette est égale à $\dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$.

Répondre au problème revient donc à résoudre l'équation $\dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$, ce qui équivaut à $e^x + e^{-x} - 2 = 4x$.

Par conséquent, **le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation (E) : $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$**.

2) a) $\boldsymbol{x\left(\dfrac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2} = e^x - 4x + e^{-x} - 2 = \boldsymbol{f(x)}$, **pour tout réel x strictement positif**.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées), alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty$ (par somme de limites).

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty$ (par produit de limites).

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ (par quotient de limites).

On en déduit que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ (par somme de limites).

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;+\infty[$.

Pour tout réel x positif, $\boldsymbol{f'(x) = e^x - e^{-x} - 4}$.

b) $f'(x) = 0$ équivaut à $e^x - e^{-x} - 4 = 0$, c'est-à-dire à $(e^x - e^{-x} - 4) \times e^x = 0 \times e^x$, ou encore à $e^{2x} - e^0 - 4e^x = 0$. Par suite, l'équation $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **équivaut à** $\boldsymbol{(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0}$.

c) Posons $X = e^x$. $f'(x) = 0$ équivaut alors à $X^2 - 4X - 1 = 0$ (avec $X > 0$).

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$; comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$X_1 = \dfrac{4 - \sqrt{20}}{2} = \dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ et $X_2 = \dfrac{4 + \sqrt{20}}{2} = \dfrac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$.

Comme $X > 0$, l'équation $X^2 - 4X - 1 = 0$ admet une unique solution $2 + \sqrt{5}$.

Par suite, $e^x = 2 + \sqrt{5}$, ce qui équivaut à $x = \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

Par conséquent, **l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$**.

4) a)

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = e^0 + e^0 - 4 \times 0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

$f\left(\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) \approx -3{,}3$

b) Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right]$, la fonction f est strictement décroissante et a pour maximum 0 atteint en 0. Par suite, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution strictement positive.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\ ; +\infty\right[$, 0 appartient à $\left[f\left(\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)\ ; +\infty\right[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive α.

Par conséquent, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive α**.

5) a)

m	a	b	$b - a$	$f(m)$	test $f(m) > 0$
	2	3	1		
2,5	**2**	**2,5**	**0,5**	**0,265**	**VRAI**
2,25	**2,25**	**2,5**	**0,25**	**–1,407**	**FAUX**
2,375	**2,375**	**2,5**	**0,125**	**–0,656**	**FAUX**
2,4375	**2,4375**	**2,5**	**0,0625**	**–0,218**	**FAUX**

b) Cet algorithme permet de résoudre l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie, sachant que la solution strictement positive α appartient à l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

On obtient un encadrement au dixième de cette solution : $\mathbf{2{,}4375 < \alpha < 2{,}5}$.

c) Soit t un réel strictement positif.

$\frac{t}{39}$ est une solution de l'équation (E) : $e^{x}+e^{-x}-4x-2=0$.

D'après la question 4) b), on en déduit que $\frac{t}{39}=\alpha$; par suite, $t=39\alpha$.

D'après la question 5) b), on obtient alors : $39\times 2{,}4375<t<39\times 2{,}5$, c'est-à-dire $95{,}0625<t<97{,}5$.

D'après l'énoncé, la largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation : (E') : $e^{\frac{t}{39}}+e^{-\frac{t}{39}}-4\frac{t}{39}-2=0$.

Par conséquent, **la hauteur de la Gateway Arch est comprise entre 190,125 et 195 mètres**.