CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

Suites	***Pour le 11 octobre 2018***

Exercice donné en Métropole, en septembre 2018

1) À l'aide de la calculatrice :
- **lorsque $a = 2{,}9$, il semble que la suite (u_n) soit convergente vers 1** ;
- **lorsque $a = 3{,}1$, il semble que la suite (u_n) soit divergente vers $+\infty$** .

2) a) Comme $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, en passant aux limites et comme la limite est unique, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$; par suite, $\boldsymbol{\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}}$.

b) $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$ équivaut à $\frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2} - \ell = 0$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\ell^2 - 2\ell + \frac{3}{2} = 0$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = 1$; comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$\ell_1 = \frac{2-\sqrt{1}}{2 \times \frac{1}{2}} = 1 \text{ et } \ell_2 = \frac{2+\sqrt{1}}{2 \times \frac{1}{2}} = 3.$$

Par conséquent, **les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3**.

3) a) La fonction f est une fonction du second degré dont le coefficient devant le terme x^2 .
De plus, l'abscisse du sommet de la parabole représentant cette fonction est
$-\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$. Par conséquent, **la fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$** .

b) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ »

$\rightarrow$ *Initialisation* : Comme $u_0 = 2{,}9$ et $u_1 = f(u_0) = 2{,}805$, alors on a bien $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

$\rightarrow$ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, alors $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$,
c'est-à-dire $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
On en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$\rightarrow$ La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie **pour tout entier naturel n, soit : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$** .

c) D'après la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Par conséquent, (u_n) converge vers un réel ℓ.

D'après la question 2) b), les valeurs possibles de ℓ sont 1 ou 3.

Comme la suite (u_n) est décroissante et que $u_0 < 3$, alors la seule valeur possible de la limite est 1. Par conséquent, **(u_n) converge vers 1**.

4) a) Supposons que la suite (u_n) soit majorée. Comme elle est croissante, alors elle va converger vers un réel qui ne peut être que 1 ou 3.
Or $u_0 > 3$ et la suite est croissante ; elle ne peut donc ne converger ni vers 1, ni vers 3.

L'hypothèse que la suite (u_n) soit majorée est alors absurde.

Par conséquent, **la suite (u_n) n'est pas majorée**.

b) La suite (u_n) est croissante et non majorée ; d'après un théorème du cours, **(u_n) diverge vers $+\infty$**.

c)

```
P ← 0
U ← 3,1

Tant que U < 10^6
    P ← P + 1
    U ← (1/2)U² − U + 3/2
Fin du tant que
```