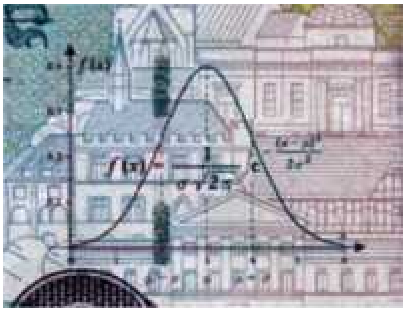
LOI NORMALE

Cours	Terminale S

1. Du discret au continu

Lorsqu'on étudie la loi binomiale sur un grand nombre d'expériences ($n > 50$ par exemple) à condition que la probabilité de succès sur une expérience ne soit pas trop petite ($p > 0{,}1$), on peut approximer cette loi binomiale par une loi normale dont la représentation est une courbe en cloche ou courbe de Gauss. On passe ainsi d'une distribution discrète à une distribution continue beaucoup plus souple.
Cette loi normale intervient dans de nombreuses distributions statistiques, lorsqu'un critère d'un individu (par exemple la taille d'une femme adulte) dépend d'un grand nombre de facteurs ou paramètres. La répartition de la taille d'une femme adulte dans une population suit alors une loi normale.

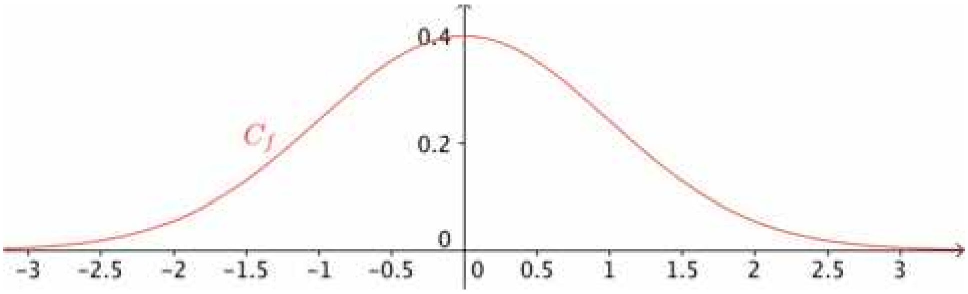


Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855) a conçu une loi statistique continue, appelée loi normale ou loi de Laplace-Gauss, dont la répartition est représentée par la fameuse courbe en cloche.
L'adjectif « normale » s'explique par le fait que cette loi décrit et modélise des situations statistiques aléatoires concrètes et naturelles.

2. Loi normale centrée réduite

1) Définition

Définition 1 : La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\text{®}}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

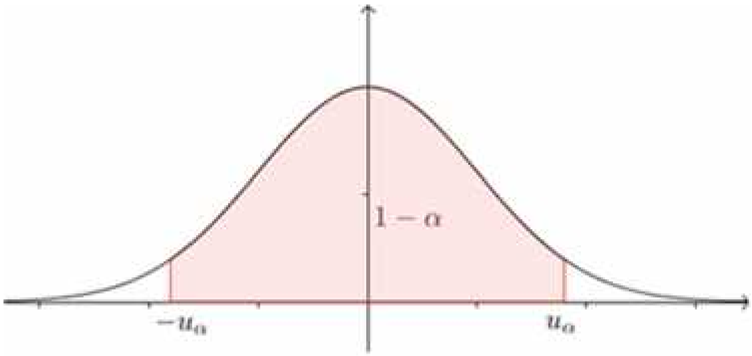


La représentation graphique de la fonction densité de la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ est appelée *courbe en cloche* ou *courbe de Gauss*. Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque : Il n'existe pas de primitive s'exprimant avec des fonctions élémentaires pour cette fonction et que le calcul de l'aire sous la courbe demande des méthodes plus ou moins détournées, tel un changement de variable.

2) Propriété

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
Soit α un réel de l'intervalle $]0\ ;\ 1[$. Il existe un unique réel positif u_α tel que $p(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$.



Démonstration (exigible au Bac) : Par symétrie de la courbe de la fonction densité f, on a :
$p(-x \le X \le x) = 2 \times p(0 \le X \le x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2F(x)$, où F est la primitive de f qui s'annule en 0.
La fonction F est continue et strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, il en est de même pour la fonction $2F$.
L'aire totale sous la courbe est égale à 1, donc par symétrie, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2F(x) = 1$.
Comme la fonction $2F$ est continue et strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, que $2F(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2F(x) = 1$, et que $1-\alpha$ appartient à $]0\ ;\ 1[$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel u_α de $[0\ ;+\infty[$ tel que $2F(x) = 1-\alpha$.

Remarques : $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
On peut alors écrire que $p(-1,96 \le X \le 1,96) = 0,95$ et $p(-2,58 \le X \le 2,58) = 0,99$.

3) Espérance et variance mathématiques

Propriété 2 (admise) : Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, alors $E(X)=0$ et $V(X)=1$.

Remarque : C'est pour cette raison que cette loi normale est centrée $(E(X)=0)$ et réduite $(V(X)=1)$.

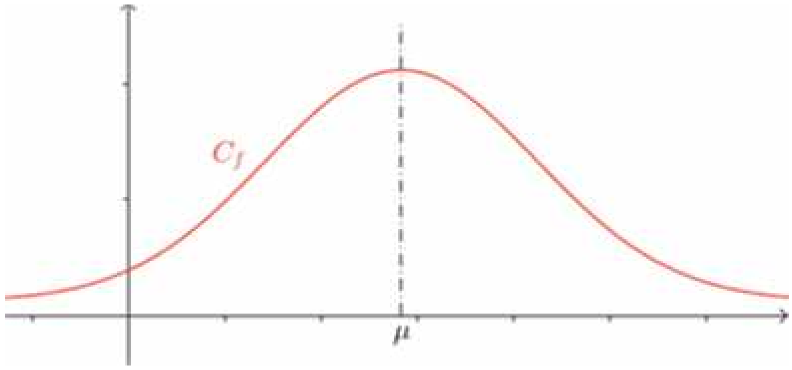
3. Loi normale

1) Définition

Définition 2 : Soit un nombre réel μ et un nombre réel strictement positif σ.
Dire qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ,

notée $\mathcal{N}\left(« \,;\, ±^2\right)$, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-«}{±}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

courbe représentative de la fonction densité de la loi $\mathcal{N}\left(« \,;\, ±^2\right)$



<u>Remarque</u> : La courbe représentative de la fonction densité de la loi $\mathcal{N}\left(« \,;\, ±^2\right)$ est une *courbe en cloche* symétrique par rapport à la droite d'équation $x = «$.

2) Utilisation de la calculatrice, de GeoGebra ou d'un tableur

Les températures de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart-type 3,6 °C.
On appelle T la variable aléatoire associée aux températures.
Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :

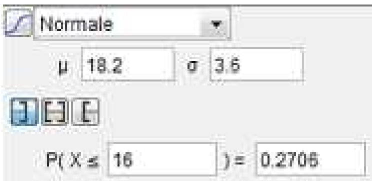
a) températures inférieures à 16 °C
b) températures comprises entre 20°C et 24,5°C
c) températures supérieures à 21°C.

❶ avec GeoGebra

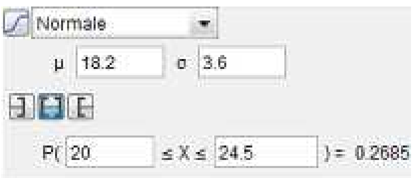
Cliquer dans le menu Affichage sur l'icone 

, puis remplir les paramètres. Pour la question a), cliquer sur ; pour la question b), cliquer sur ; pour la question c), cliquer sur .

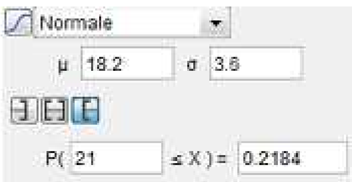
Question a)



Question b)



Question c)



❷ avec un tableur

Rentrer dans colonne A les nombres de 1 à 25 (avec un pas de 0,1), et dans la cellule B1, écrire la formule : =LOI.NORMALE(A0;18,2;3,6;VRAI) qui sera « recopiée » vers le bas.
En colonne B, chaque ligne i donne le résultat de $p\left(X \le A_i\right)$.
Pour trouver $p(20 \le X \le 24{,}5)$, on calculera $p(X \le 24{,}5) - p(X \le 20)$.
Pour calculer $p(21 \le X)$, on calculera $1 - p(X \le 21)$.

❷ avec une calculatrice

T.I. 83 +

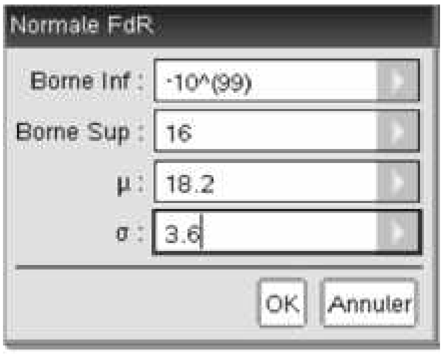
puis saisir :

normalcdf(-1^{E}99,16,18.2,3.6) pour la question a**)** ;
normalcdf (20,24,5,18.2,3.6) pour la question b**)** ;
normalcdf (21,1^{E}99,18.2,3.6) pour la question c).

T.I. nspire

, **5. Probabilités, 5. Distributions… 2. Normal FdR**

Remplir la boite de dialogue qui s'ouvre :



Casio Graph 35 +

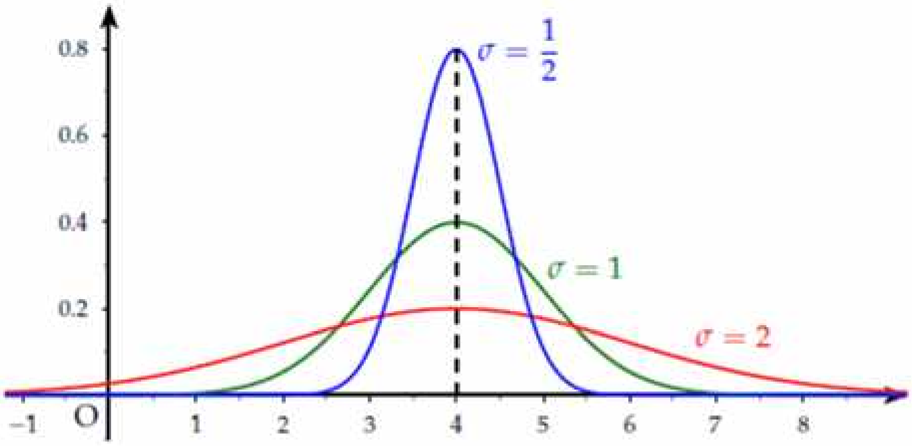
Taper sur la touche "**OPTN**", puis dans l'ordre "**STAT**", "**DIST**" "**NORM**" et "**Ncd**"

puis saisir :

NormCD(-1^{E}99,16,3.6,18.2) pour la question a**)** ;
NormCD(20,24,5,3.6,18.2) pour la question b**)** ;
NormCD(21,1^{E}99,3.6,18.2) pour la question c).

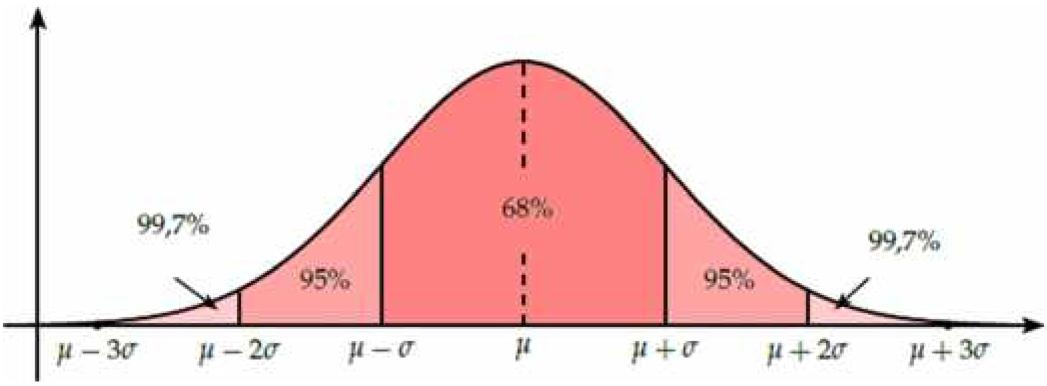
3) Influence de l'écart-type

La courbe est d'autant plus "resserrée" autour de son axe de symétrie que l'écart-type ± est petit.
L'écart-type (ou la variance) est un caractère de dispersion autour de l'espérance qui est un caractère de position.



Ces différentes courbes peuvent être repérées par 3 intervalles caractéristiques :
[« − ± ; « + ±], [« − 2± ; « + 2±] et [« − 3± ; « + 3±].

C. Lainé



On a alors :

Propriété 3 (admise) : Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$, alors :

$p\left(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma\right) \approx 0,683$

$p\left(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma\right) \approx 0,954$

$p\left(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\right) \approx 0,997$

3. Théorème de Moivre-Laplace

1) Rappel

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

Alors X associe le nombre de succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On a dans ce cas : $E(X)=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

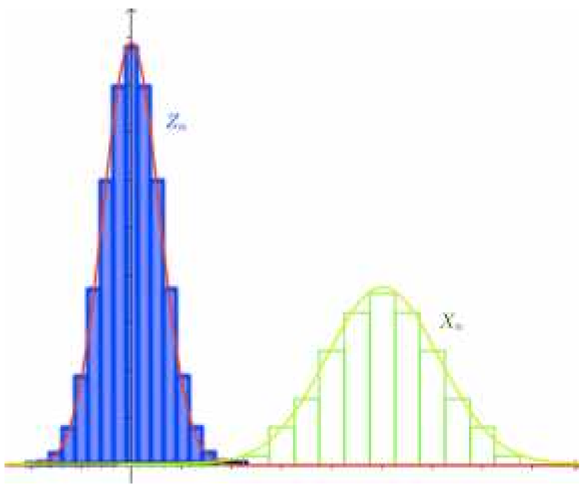
2) Propriété

Théorème (admis) : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

Soit $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ la variable centrée réduite associée à X.

Pour tous nombres a et b tels que $a<b$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p(a\le Z\le b)=\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

Remarque : Ce théorème traduit le fait que la probabilité d'un événement associé à une loi binomiale peut être approchée pas une probabilité d'un événement associé à la loi normale centrée réduite.



En pratique, on pourra donc approcher une loi binomiale en utilisant un changement de variable en se ramenant à la loi normale centrée réduite. L'erreur sur les probabilités est très faible si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

3) Application

On lance 180 fois un dé à jouer et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparition du 6. En utilisant l'approximation normale, calculer au millième les probabilités suivantes :

a) p(X á 20)

b) p(X [40)

c) p(X á 20 ou X [40)

Il faut d'abord calculer les paramètres de la loi normale correspondante à cette loi binomiale $\mathscr{B}\left(180\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.

$E(X) = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30$ et ± $(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$

Comme $np = 30$ et $n(1-p) = 150$, on se trouve dans les hypothèses de l'approximation.

À l'aide d'une calculatrice, on obtient :

a) $p(X \leq 20) = \text{normalcdf}\left(\text{-}1^{\text{E}}99, 20, 30, 5\right) \approx 0{,}023$

b) $p(X > 40) = \text{normalcdf}\left(40, 1^{\text{E}}99, 30, 5\right) \approx 0{,}023$

a) $p(X \leq 20 \text{ ou } X > 40) = \text{normalcdf}\left(\text{-}1^{\text{E}}99, 20, 30, 5\right) + \text{normalcdf}\left(40, 1^{\text{E}}99, 30, 5\right) \approx 0{,}045$