CALCUL INTÉGRAL	
Cours	***Terminale S***

1. Notion d'intégrale

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $\left[a\ ;\ b\right]$.

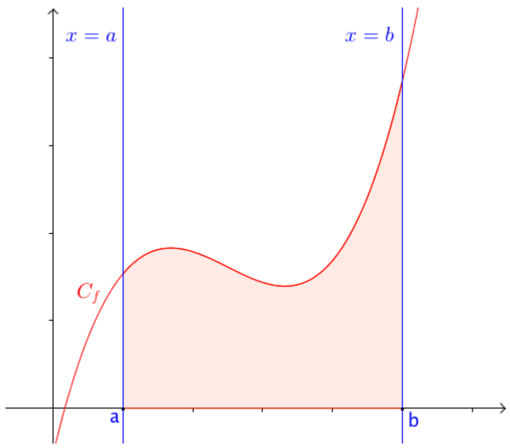
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

<u>Définition 1</u> : On appelle :

• **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle bâti à partir des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

• **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ $\left(a \neq b\right)$.

Ce domaine est l'ensemble des points M $(x\ ;\ y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f\left(x\right)$.



• **Intégrale de f sur $\left[a\ ;\ b\right]$** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$. On la note : $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$, qui se lit « intégrale de a à b de f ».

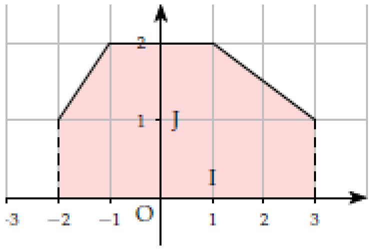
a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716 Le symbole $\int$ est un S stylisé (initiale de somme) afin de rappeler que l'intégrale peut être obtenue comme limite d'une somme d'aires de rectangles. Ce symbole a été introduit par Leibniz au XVIIe siècle, mais la notation $\int_a^b$ a été introduite par le français *Joseph Fourier* (1768 ; 1830). Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

C. Lainé

Exemple : *On donne la représentation ci-contre d'une fonction f sur $[-2\ ;\ 3]$, ainsi que les mesures : OI = 2 cm et OJ = 3 cm.*

Calculer $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en déduire l'aire en cm² de la partie grisée.



Une unité d'aire correspond à un rectangle. Or il y en a 7 « entiers », une moitié de rectangle et deux morceaux (à droite) qui forment un rectangle « entier ».

Par conséquent, $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 8{,}5$.

Or 1 u.a. $= 2 \times 3 = 6$ cm² et $8{,}5 \times 6 = 51$, donc l'aire de la surface grisée est égale à 51 cm².

Remarques : • $f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire d'un rectangle de dimensions $f(x)$ et $\mathrm{d}x$.

• La variable x est dite muette et peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

2. Exemple de calcul d'intégrale

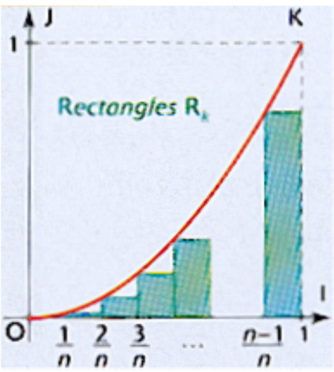
Calculer l'intégrale de la fonction carrée sur $[0\ ;\ 1]$.

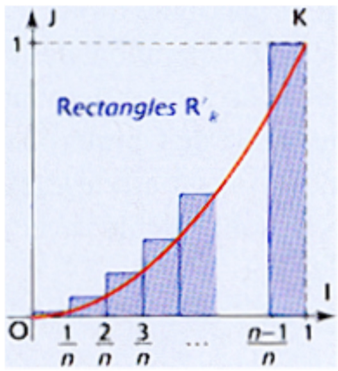
a) Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, $\mathscr{C}$ est la courbe qui représente la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^2$. $\mathscr{D}$ est le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

On choisit de prendre l'aire du carré OIKJ pour unité d'aire et on se propose de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$. Pour cela :

• on subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;

• sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}\ ;\ \frac{k+1}{n}\right]$ (avec $0 \le k \le n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ et le rectangle R'_k de hauteur $\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$.





a) On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n la somme des aires des rectangles R'_k.

Donc : $u_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)$.

On peut montrer par récurrence que $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Donc $u_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

De même, $v_n=\dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right]=\dfrac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$.

Donc $v_n=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=u_n+\dfrac{1}{n}$.

On en déduit que : $u_n\le\mathcal{A}\le v_n$.

b) *Calculer à l'aide d'un algorithme les valeurs de u_n et v_n lorsque n prend les valeurs : 5 ; 10 ; 20 ; 100*

Entrée Saisir les réels a et b Saisir l'entier n **Initialisation** Affecter à k la valeur $(b-a)/n$ Affecter à x la valeur a Affecter à u la valeur 0 Affecter à v la valeur 0 **Traitement des données** Pour i allant de 0 à n-1 Faire Affecter à u la valeur $u+k\times f(x)$ Affecter à x la valeur $x+k$ Affecter à v la valeur $v+k\times f(x)$ Fin pour **Sortie** Afficher u et v	ou	**Entrée** Lire l'entier n **Initialisation** Affecter à u la valeur 0 **Traitement des données** Pour i allant de 1 à n-1 Faire Affecter à u la valeur $u+\dfrac{k^2}{n^3}$ Fin pour Affecter à v la valeur $u+\dfrac{1}{n}$ **Sortie** Afficher u et v

On obtient les résultats suivants :

n	u	v
5	0,240	0,440
10	0,285	0,385
20	0,308	0,359
100	0,328	0,339

Il semble que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0,333.

c) *Montrer que ces suites convergent.*

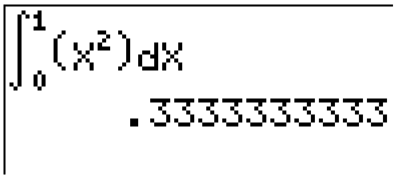
$u_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{6n^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{6n^2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\dfrac{1}{3}$ (par produit et somme de limites).

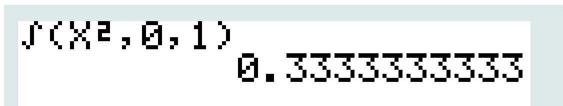
Comme $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$, et par suite, $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

e) *Utilisation de la calculatrice*

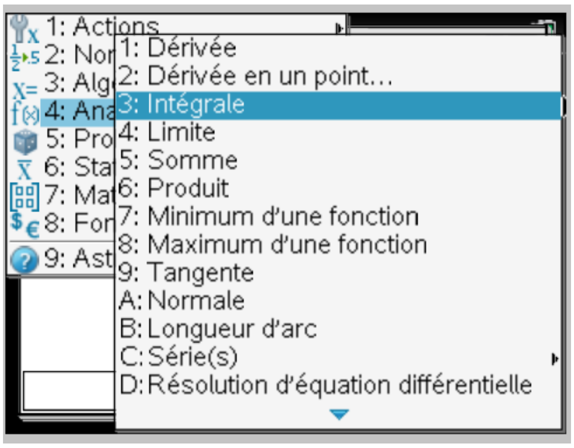
<table>
<tr><td>TI 83</td><td>

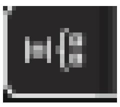
</td></tr>
<tr><td>Graph 85</td><td>

</td></tr>
<tr><td>TI nspire</td><td>

ou

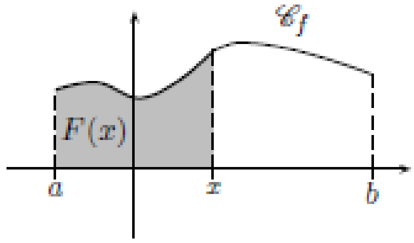
$\int_{\square}^{\square} \square \, \mathrm{d}\square$

$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \qquad \frac{1}{3}$
</td></tr>
</table>

3. Fonction définie par une intégrale

Théorème 1 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et sa dérivée est la fonction f.



Démonstration dans le cas où f est positive et croissante : Soit $x_0\in[a\,;b]$ et h un réel non nul tel que $(x_0+h)\in[a\,;b]$.

- **Si $h>0$** : Par définition, $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

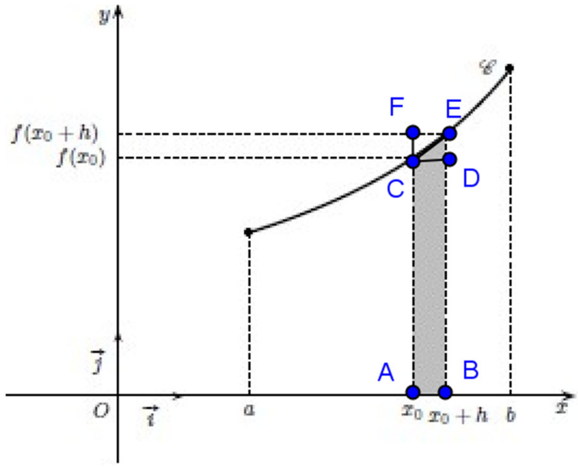
Par suite, $F(x_0+h)-F(x_0)$ est l'aire de la partie grisée ci-contre.

Comme f est croissante, cette aire est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABCD.

Or l'aire du rectangle ABCD est égale à $h\times f(x_0)$, et celle du rectangle ABCD est égale à $h\times f(x_0+h)$.

On en déduit alors que :

$h\times f(x_0)\le F(x_0+h)-F(x_0)\le h\times f(x_0+h)$



Comme $h>0$, on obtient : $f(x_0)\le\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\le f(x_0+h)$.

Or f est continue sur $[a\,;b]$, donc en x_0, alors $\lim\limits_{h\to0} f(x_0+h)=f(x_0)$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

- **Si $h<0$** : par un raisonnement analogue, on obtient :

$$-h\times f(x_0+h)\le F(x_0)-F(x_0+h)\le -h\times f(x_0).$$

Comme $-h>0$, alors $f(x_0+h)\le\dfrac{F(x_0)-F(x_0+h)}{-h}\le f(x_0)$, ou encore

$f(x_0+h)\le\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\le f(x_0)$. Par conséquent, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

- Finalement, f est dérivable pour tout x_0 de $[a\,;b]$, et $F'(x_0)=f(x_0)$.

4. Primitives d'une fonction continue

1) Définition et propriétés

Soit les fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=2x+1$ et $g(x)=x^2+x+5$.

On remarque que, pour tout réel x, $g'(x) = f(x)$.
On dit que g est une primitive de f sur **R**.

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f.

Remarque : Dans l'exemple précédent, la fonction h définie sur **R** par $h(x) = x^2 + x$ est également une primitive de f sur **R**. Plus généralement, si C est une constante réelle, la fonction h définie sur **R** par $h(x) = x^2 + x + C$ est une primitive de f sur **R**. Une fonction n'a pas une seule primitive.

Propriété 1 : Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toute primitive de f sur I est de la forme $F + C$ où C est une fonction constante sur I.

Démonstration :
• Si F est une primitive de f sur I, alors la fonction G définie par $G(x) = F(x) + C$ où C est une fonction constante sur I, vérifie : $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.
Donc G est une primitive de f sur I.

• Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, considérons la fonction $G - F$ dérivable sur I.
Elle vérifie, pour tout élément x de I :
$(G-F)'(x) = (G'-F')(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Donc $G - F = C$ sur I, où C est une fonction constante, c'est-à-dire pour tout élément x de I, $G(x) = F(x) + C$.

Exemple : La fonction sinus est une primitive sur **R** de la fonction cosinus, alors toute primitive G de la fonction cosinus sur **R** vérifie : $G(x) = \sin x + C$, où C est un nombre réel.

Remarque : L'hypothèse ***I est un intervalle*** est fondamentale.
En effet, soit les fonctions F et G définies sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$F(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \begin{cases} G(x) = \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 0 \\ G(x) = \frac{1}{x} - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, F et G ont même fonction dérivée f :
$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, mais il n'existe pas de fonction constante C telle que, pour tout x de $\mathbf{R}^*$, $G(x) = F(x) + C$.

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, x_0 un nombre réel de I et y_0 un nombre réel. Il existe une et une seule primitive de F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Démonstration : • **Unicité** : soit G une primitive de f sur I.
Les primitives de f sont de la forme $F(x) = G(x) + C$, C étant un nombre réel.
$F(x_0) = y_0$, donc $C = y_0 - G(x_0)$ et F est déterminée de manière unique par :
$F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

• **Existence** : soit G une primitive de f sur I.

La fonction F définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$ convient car $F'(x) = G'(x) = f(x)$ et $F(x_0) = G(x_0) + y_0 - G(x_0) = y_0$.

Exemple : Déterminons la primitive de f : $x \mapsto \cos x$ prenant la valeur 2 en $-\frac{\pi}{2}$.
Nous savons que les primitives sur **R** de f sont de la forme F : $x \mapsto \sin x + C$.
Comme $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C = 2$. D'où, C = 3 et $F(x) = \sin x + 3$.

Théorème 2 : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où f est définie sur [a ; b] et f admet un minimum m sur [a ; b]. :
La fonction g : $x \mapsto f(x) - m$ est continue et positive sur I. D'après le théorème 1, elle admet une primitive G sur $[a\ ;\ b]$, telle que $G'(x) = g(x) = f(x) - m$. Posons $F(x) = G(x) + mx$; et F est dérivable sur $[a\ ;\ b]$, de plus $F'(x) = G'(x) + m = f(x)$. C'est donc une primitive de f sur [a; b].

Remarque : La forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue malgré le fait que son existence soit assurée par le théorème précédent.. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous une forme explicite.

2) Tableaux des primitives

Les résultats du tableau suivant sont obtenus à partir des dérivées connues. C désigne une constante quelconque.

Fonction	Primitives	Intervalle I
$f(x) = k$ (k constante réelle)	$F(x) = kx + C$	**R**
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbf{Z}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbf{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0\ ;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0\ ;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	**R**
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	**R**
$f(x) = \sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	**R**
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	**R**
$f(x) = \cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	**R**
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + C$	**R** - $\left\{k\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$

Application : *f est une fonction définie sur **R**. Trouver dans chacun des cas suivants les primitives de f : f(x) = 2 ; f(x) = x ; f(x) = cos(2x-$\frac{\pi}{4}$).*

• Si $f(x)=2$, alors les primitives F de f sur **R** sont définies par $F(x)=2x+C$, où C est une constante réelle.

• Si $f(x)=x$, alors les primitives F de f sur **R** sont définies par $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$, où C est une constante réelle.

• Si $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, alors les primitives F de f sur **R** sont définies par $F(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$, où C est une constante réelle.

3) Linéarité des primitives

Propriétés 3 : Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :
- F + G est une primitive de la fonction f + g sur I ;
- pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Démonstration : Soit x un élément de I. Soit k un réel.

• $(F+G)'(x)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$; d'où F + G est une primitive de la fonction f + g sur I.

• $(kG)'(x)=kF'(x)=kf(x)=(kf)(x)$; d'où kF est une primitive de kf sur I.

Attention ! : Une primitive d'un produit ne sera pas obtenue en prenant le produit des primitives, puisque la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Application : *Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I :*

a) f(x)= $3x^2-5x+\frac{2}{x}$ *, I = **R**⁺ ; b) f(x)=* $3\sin x+2\cos x$ *, I = **R** ; c) f(x)=* $\frac{e^x+4}{3}$ *, I = **R***

a) $F(x)=3\times\frac{1}{3}x^3-5\times\frac{1}{2}x^2+2\ln x+C=x^3-\frac{5}{2}x^2+2\ln x+C$;

b) $F(x)=3\times(-\cos x)+2\times(\sin x)+C=-3\cos x+2\sin x+C$;

c) $f(x)=\frac{1}{3}e^x+\frac{4}{3}$; donc $F(x)=\frac{1}{3}e^x+\frac{4}{3}x+C$.

4) Primitives et fonctions composées

C est une constante réelle, I un intervalle de **R** et u une fonction définie et dérivable sur I.

Fonction f	Primitives F de f sur I	Conditions
$u'u^n \quad n \in \mathbf{Z}^* - \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	Si $n<0$, $u(x)$ doit être différent de 0, pour tout x de I
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C$	$u(x)>0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x)>0$ pour tout x de I
$u'e^u$	e^u+C	
$u'\cos u$	$\sin u + C$	
$u'\sin u$	$-\cos u + C$	

Applications : *Pour chacune des fonctions f suivantes, reconnaître une règle de dérivation permettant de déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I :*

a) f(x)= $x^2(x^3-1)^5$ *; I =* $\mathbf{R}$.

b) f(x)= $\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ *; I =]1 ; +* ∞*[.*

c) f(x)= $\frac{x}{x^2-4}$ *; I =]2 ; +* ∞*[.*

d) f(x)= $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ *; I =]0 ; +* ∞*[.*

e) f(x)= $\frac{\ln x}{x}$ *; I =]0 ; +* ∞*[.*

f) f(x) = e^{3x} *; I =* $\mathbf{R}$.

a) $f(x)=x^2\left(x^3-1\right)^5$. Posons $u(x)=x^3-1$, alors $u'(x)=3x^2$. Ainsi $x^2=\frac{1}{3}u'(x)$, et, par suite, $f(x)=\frac{1}{3}u'(x)u^5(x)$. Par conséquent, $F(x)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}u^6(x)=\frac{1}{18}\left(x^3-1\right)^6$.

b) $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$. Posons $u(x)=x^2-1$, alors $u'(x)=2x$. Ainsi $x=\frac{1}{2}u'(x)$, et, par suite,

$f(x)=\frac{3\times\frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}}=3\times\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Par conséquent, $F(x)=3\sqrt{x^2-1}$.

c) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$. Posons $u(x)=x^2-4$, alors $u'(x)=2x$. Ainsi $x=\frac{1}{2}u'(x)$, et, par suite,

$f(x)=\frac{\frac{1}{2}u'(x)}{u(x)}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$. Par conséquent, $F(x)=\frac{1}{2}\times\ln\left(u(x)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right)$.

d) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Posons $u(x)=\frac{1}{x}$, alors $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Par suite, $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

Par conséquent, $F(x)=e^{u(x)}=e^{\frac{1}{x}}$.

e) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Posons $u(x)=\ln x$, alors $u'(x)=\frac{1}{x}$.Par suite, $f(x)=u'(x)u(x)$.

Par conséquent, $F(x)=\frac{1}{2}\times u^2(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

f) $f(x)=e^{3x}$. Posons $u(x)=3x$, alors $u'(x)=3$. Par suite, $f(x)=\frac{1}{3}\times u'(x)e^{u(x)}$.

Par conséquent, $F(x)=\frac{1}{3}e^{u(x)}=\frac{1}{3}e^{3x}$.

5. Calculs d'intégrales

1) Définition

Propriétés 4 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I.
Si F est une primitive quelconque de f sur I, $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Démonstration : La dérivée de la fonction G définie sur $[a\,;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction f. Donc G est une primitive de f sur $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\,;b]$, on a $G(x)=F(x)+C$, où C est une constante réelle.
De plus, $G(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ et $G(a)=F(a)+C$, donc $F(a)=-C$ et par suite, $C=-F(a)$.
On en déduit que $G(b)=\int_a^b f(t)\,dt=F(b)+C=F(b)-F(a)$.

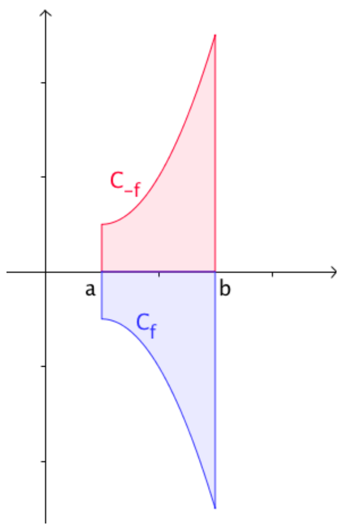
Définition 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ le nombre $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$.
On écrit également : $\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$.

Remarque : La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a\,;b]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= F(b)-F(a)=-G(b)+G(a)\\ &=-\big(G(b)-G(a)\big)\\ &=-\int_a^b(-f)(t)\,dt\end{aligned}$$

où G est une primitive de la fonction $-f$.

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a\,;b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a\,;b]$.



Applications : Calculer, à l'aide des primitives, les intégrales suivantes :

- $\int_1^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$
- $\int_e^{e^3}\frac{1}{x\ln x}\,dx$

- $\int_1^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{e}=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

Voir la recherche d'une primitive dans la partie 4, 4) e), page 9.

- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_e^{e^3} = \ln\left(\ln\left(e^3\right)\right) - \ln\left(\ln(e)\right) = \ln\left(3\ln(e)\right) - \ln 1 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

En effet, si on note f la fonction définie sur $\left[e\ ;\ e^3\right]$ par $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$. La fonction F définie sur I par $F(x) = \ln\left(u(x)\right) = \ln(\ln x)$ est une primitive de f sur I.

2) Propriétés de l'intégrale

Propriété 5 : Soit f une fonction continue sur I, et a et b deux réels de I.
Alors : $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstrations : Soit F une primitive de f sur I.

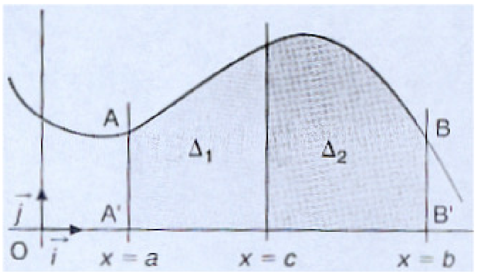
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 6 (relation de Chasles) : Soit f une fonction continue sur I, et, a, b et c trois réels de I. Alors : $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstrations : Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(F(c) - F(a)\right) + \left(F(b) - F(c)\right)$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriétés 7 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.
Pour tout réel k, $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstrations : Soit F une primitive de f sur I. Soit G une primitive de g sur I. Soit k un réel.

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k\left(F(b) - F(a)\right) = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 8 : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I, avec $a \leq b$.

Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Si $f \leq g$ sur I, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstrations : • Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive. Par suite, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

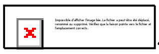
• Si $f(x) \leq g(x)$ alors $g(x) - f(x) \geq 0$.

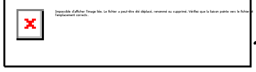
Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x \geq 0$.

D'après les propriétés 6 et 7, on obtient $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Par conséquent, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Application : encadrement d'une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a .

b) En déduire que .

a) Comme $x \in [0\ ;\ 1]$, alors $x^2 \leq x$.

De plus, la fonction exponentielle est strictement croissante et positive sur **R**, alors $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) D'après le a), on en déduit que $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$.

Or $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = [C]_0^1 = 0$ et $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

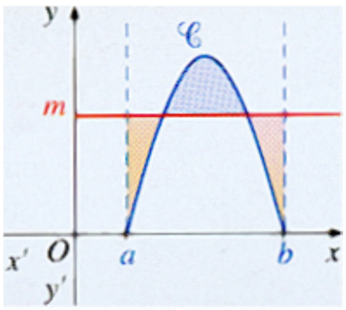
Par conséquent, $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x \leq e - 1$.

6. Valeur moyenne d'une fonction

1) Définition

Définition 4 : Soit f une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est le nombre réel : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



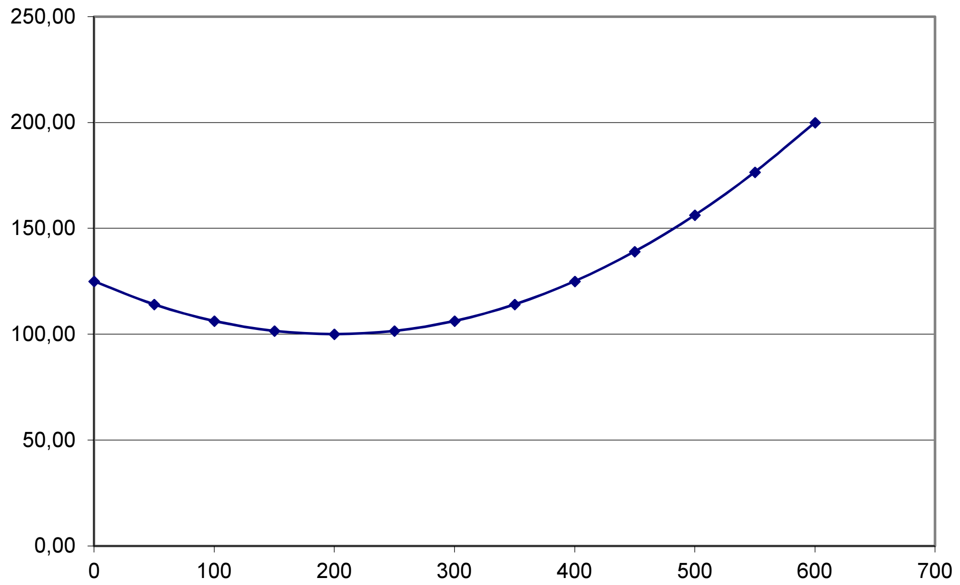
Si $f(x) > 0$, on s'intéresse au rectangle de largeur $b - a$ dont l'aire est égale à l'aire de la surface hachurée : c'est la longueur m de ce rectangle que l'on appelle « valeur moyenne de f » sur $[a\ ;\ b]$.

Si f est une fonction constante sur $[a\ ;\ b]$, sa valeur moyenne sur $[a\ ;\ b]$ est égale à cette constante.

En fin de compte, la technique est de remplacer f par une fonction constante de même intégrale sur le même intervalle.

2) Exemples

Exemple 1 : *On voudrait niveler le terrain décrit ci-dessous. A quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ?*



$$h(d) = \frac{d^2}{1600} - \frac{d}{4} + 125$$

Déterminer une primitive de la fonction h. Puis calculer la valeur moyenne μ de h sur l'intervalle $[0;600]$. Démontrer ainsi le résultat conjecturé lors de la première partie de ce problème.

Soit H une primitive de h sur $[0 ; 600]$.

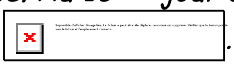
$H(d) = \frac{1}{1\,600} \times \frac{1}{3} d^3 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} d^2 + 125d = \frac{1}{4\,800} d^3 - \frac{1}{8} d^2 + 125d$.

D'où $\mu = \frac{1}{600 - 0} \int_0^{600} h(t)\,\mathrm{d}t = \left[H(t) \right]_0^{600} = H(600) - H(0)$.

Or $H(0) = 0$ et $H(600) = \frac{216\,000\,000}{4\,800} - \frac{360\,000}{8} + 75\,000 = 75\,000$.

Par conséquent, la valeur moyenne de h sur $[0 ; 600]$ est égale à 125.

Donc il faut situer le terrain nivelé à 125 mètres de hauteur pour que les remblais équilibrent les déblais.

<u>Exemple 2</u> : *On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie. Au 10ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à* .

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$\mu = \frac{1}{16-0} \int_0^{16} f(x)dx = \frac{1}{16} \int_0^{16} \left(16x^2 - x^3\right) dx = \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} = \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right)$$

$$\mu = \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4} = \frac{16^3}{12} = \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.