CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

Barycentres, lieux géométriques et fonctions	Pour le 2 novembre 2006

Préliminaire :

1. Barycentre de deux points

1) Définition

Définition 1 : Soit A et B deux points et a et b deux réels dont la somme n'est pas nulle.
Alors, il existe un unique point G de l'espace tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GA}=\vec{0}$.
Ce point G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b (on parle aussi du barycentre du système de points pondérés {(A, a), (B, b)}.

En particulier, le barycentre de A et B affectés du même coefficient non nul est le milieu de [AB].
Le barycentre G de deux points distincts A et B appartient à la droite (AB).
- Si a et b sont de même signe, G appartient au segment [AB].
- Si a et b sont de signes contraires, G est à l'extérieur du segment [AB].

2) Propriété fondamentale

Propriété 1 : Si G est le barycentre du système de points pondérés {(A, a), (B, b)} avec a + b ≠ 0, alors, pour tout point M du plan, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$.

En prenant M = A, on obtient : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

En prenant M = B, on obtient : $\overrightarrow{BG}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$.

2. Barycentre de trois points (et plus)

1) Définition

Définition 2 : Soit A, B, C trois points et a, b, c trois réels dont la somme est différente de 0.
Alors, il existe un unique point G de l'espace tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GA}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Ce point G est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et c (on parle aussi du barycentre du système de points pondérés {(A, a), (B, b), (C, c)}.

En particulier, on appelle isobarycentre de plusieurs points le barycentre de ces points affectés du même coefficient non nul.
L'isobarycentre de trois points A, b, C est le centre de gravité du triangle ABC.

2) Propriété fondamentale

Propriété 2 : Si G est le barycentre du système de points pondérés {(A, a), (B, b), (C, c)} avec a + b + c ≠ 0, alors, pour tout point M du plan, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Exemples :

• Soit les points pondérés (A ; -1), (B ; 3) et (C ; 2) d'un plan P.
On a s = -1 + 3 + 2 = 4. La somme des coefficients est non nulle, donc ces points pondérés ont un barycentre G.

Pour tout point M du plan P, on a : $\overrightarrow{v(M)} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

Cette relation permet de placer G.

En posant, par exemple, M = A, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Si on prend M = B, on a : $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Si on prend M = B, on a : $\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.

• Soit les points pondérés (A ; -3), (B ; 1) et (C ; 2) de l'espace.
On a s = -3 +1 + 2 = 0. La somme des coefficients est nulle, donc ces points pondérés n'ont pas de barycentre.

Pour tout point M de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{v(M)} = -3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est constant.

En posant, par exemple M = A, on a $\overrightarrow{v(M)} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

3) Théorème d'associativité (ou théorème du barycentre partiel)

Théorème 1 : Soit trois points A, B, C et trois réels a, b et c tels que a + b + c ≠ 0.
Si a + b ≠ 0, le barycentre G du système est aussi le barycentre du système {(H, a + b), (C, c)}, avec H le barycentre du système de points {(A, a), (B, b)}.

Ce théorème s'étend dans le cas d'un plus grand nombre de points ; on peut toujours, dans la recherche du barycentre de plusieurs points, remplacer deux (ou plus) de ces points par leur barycentre partiel, affecté de la somme des coefficients des points remplacés, sous réserve que cette somme soit non nulle.

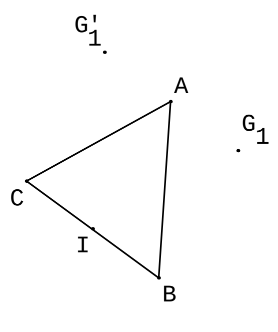
Exemple : Les points pondérés (A ; 1), (B ; 2), (C ; - 1) et (D ; 1) ont même barycentre que (H ; 3), (C ; - 1) et (D ; 1) où H est le barycentre de {(A ; 1), (B ; 2)}.

4) Propriétés

Propriétés 3 :
1. Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients de chaque point par un même réel non nul.
2. Si A, B et C ont pour coordonnées (x_A ; y_A ; z_A), (x_B ; y_B ; z_B) et (x_C ; y_C ; z_C) dans un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, alors les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), avec a + b + c ≠ 0, sont :
$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$, $y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$ et $z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}$.
3. Le barycentre de trois points pondérés A, B et C non alignés appartient au plan (ABC).
4. Le barycentre de trois points pondérés A, B et C non alignés affectés de coefficients de même signe appartient à l'intérieur du triangle ABC.

Exercice :

1)



2) a) Comme G_k est le barycentre du système {(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)}, alors on a :

$$(k^2+1)\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB}-k\,\overrightarrow{MC}=(k^2+1+k-k)\,\overrightarrow{MG_k}\ .$$

En prenant M = A, on obtient : $(k^2+1)\ \overrightarrow{AG_k}=k\,\overrightarrow{AB}-k\,\overrightarrow{AC}=k\,(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=k\,\overrightarrow{CB}$.

Par conséquent, $\mathbf{\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}}$.

b) • $f\,'(x)=\dfrac{-1\times(x^2+1)-(-x)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$. Le signe de f '(x) dépend donc du numérateur car $(x^2+1)^2$ est toujours positif.
Or f '(x) s'annule en x = - 1 et x = 1.
Donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

c) D'après le tableau de variation de la fonction f, on en déduit que lorsque x décrit l'intervalle [-1 ; 1], f(x) décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Par conséquent, lorsque k décrit l'intervalle [-1 ; 1], $\dfrac{-k}{k^2+1}$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; c'est-à-dire G_k décrit le segment $[G_{-1}G_1]$. Donc :

l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [-1 ; 1] est le segment $[G_{-1}G_1]$.

3) D'après la propriété fondamentale,

$$2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MG_1}\quad \text{et}\quad 2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MG_{-1}}$$

Donc, $\|\,2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\,\|=\|\,2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\,\|$ équivaut à $\|2\,\overrightarrow{MG_1}\|=\|2\,\overrightarrow{MG_{-1}}\|$, c'est-à-dire à $\|\overrightarrow{MG_1}\|=\|\overrightarrow{MG_{-1}}\|$, ou encore $MG_{-1}=MG_1$.

Par conséquent, **E est le plan médiateur du segment $[G_{-1}G_1]$**.

4) D'après le 3), $2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MG_1}$.
De plus, $2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\,\overrightarrow{IA}$.
Donc $\|\,2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\,\|=\|\,2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\,\|$ équivaut à $\|2\,\overrightarrow{MG_1}\|=\|2\,\overrightarrow{IA}\|$, c'est-à-dire $MG_1 = IA$.

Par conséquent, **F est la sphère de centre G_1 et de rayon IA**.