Centres étrangers

Exercice 1

1) Comme X suit la loi normale d'espérance $\mu = 175$ et d'écart-type σ, alors $Z = \dfrac{Y - 175}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Or $P(X \leq 170) = 0{,}02$; d'où $P_N\left(Z \leq \dfrac{170 - 175}{\sigma}\right) = 0{,}02$, c'est-à-dire $P_N\left(Z \leq \dfrac{-5}{\sigma}\right) = 0{,}02$.

D'après la calculatrice, $\dfrac{-5}{\sigma} \approx -2{,}0537$. On en déduit que $\sigma = \dfrac{-5}{-2{,}0537} \approx 2{,}43$.

Par suite, $P(170 \leq X \leq 180) \approx 0{,}96$. **La réponse correcte est donc la b**.

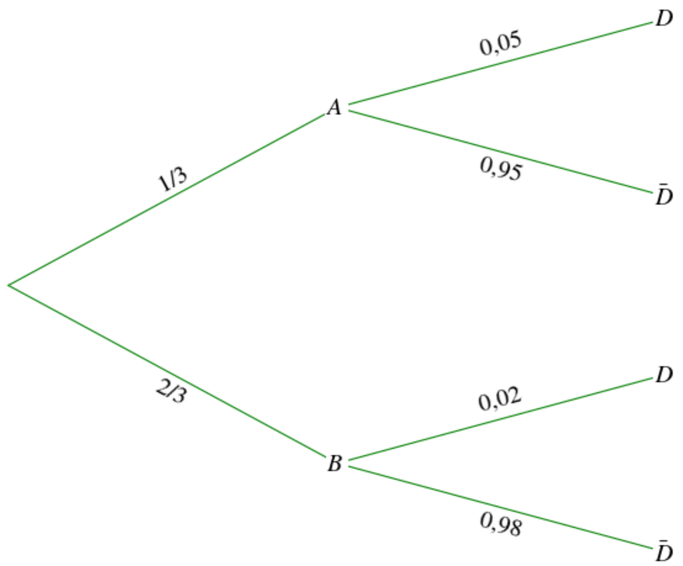
2) Soit T la variable aléatoire qui compte le nombre de bonbons déformés issus de la machine A.
Prélever un bonbon déformé est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}05$.
Cette expérience est répétée 50 fois de façon indépendante et identique.
T suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(50 ; 0{,}05)$.

Par suite, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 50$, $P(T = k) = \binom{50}{k} \times (0{,}05)^k \times (1 - 0{,}95)^{50-k}$.

On cherche alors $P(T \geq 2)$:

$P(T \geq 2) = 1 - P(T = 0) - P(T = 1) = 1 - (0{,}95)^{50} - 50 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^{49} \approx 0{,}72$.
La réponse correcte est donc la a.

3)



On recherche $P_D(B)$. Or $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{\frac{2}{3} \times 0{,}02}{\frac{1}{3} \times 0{,}05 + \frac{2}{3} \times 0{,}02} = \dfrac{\frac{0{,}04}{3}}{\frac{0{,}09}{3}} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}44$.

La réponse correcte est donc la c.

4) L'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\frac{1}{\lambda}$. Comme elle est égale à 500 jours, alors $\frac{1}{\lambda}=500$, c'est-à-dire $\lambda=\frac{1}{500}=0{,}002$.

Or : pour tous réels a et b, $p\left(X\in[a\,;b]\right)=\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b=-e^{-\lambda b}+e^{-\lambda a}=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

D'où $P(Y\leq 300)=1-e^{-0{,}002\times 300}=1-e^{-0{,}6}\approx 0{,}45$. **La réponse correcte est donc la a.**

5) On ne connaît pas la proportion p de personnes de plus de 20 ans parmi les clients.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où f est la fréquence observée. Cet intervalle a pour longueur $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Donc $\frac{2}{\sqrt{n}}\leq 0{,}05$ ce qui équivaut à $n\geq\frac{4}{0{,}05^2}$, soit $n\geq 1\,600$.

La réponse correcte est donc la c.

Exercice 2

1) Le point A est le point de la droite d_1 de paramètre $t=0$; par suite, **A appartient à la droite d_1**.

2) D'après l'énoncé : **$\overrightarrow{u_1}$, vecteur directeur de d_1, a pour coordonnées $(1;-1;1)$**.

$\overrightarrow{u_2}$, vecteur directeur de d_2, a pour coordonnées $(2;1;0)$.

Comme $\frac{x_{\overrightarrow{u_1}}}{x_{\overrightarrow{u_2}}}\neq\frac{z_{\overrightarrow{u_1}}}{z_{\overrightarrow{u_2}}}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

3) $\vec{v}\bullet\overrightarrow{u_1}=1\times 1+(-2)\times(-1)+1\times(-3)=1+2-3=0$ et $\vec{v}\bullet\overrightarrow{u_2}=1\times 2+(-2)\times 1+(-3)\times 0=0$.

Par conséquent, **$\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$**.

4) a) $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est normal au plan P si, et seulement si, $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$.

Or $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{u_1}=0\\ \vec{n}\bullet\vec{v}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+c=0\\ a-2b-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-c\\ b-c-2b-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-c=-5c\\ b=-4c\end{cases}$

Si on prend $c=-1$, on obtient $a=5$ et $b=4$.

Donc **$\vec{n}(5\ ;\ 4\ ;-1)$ est un vecteur normal au plan P**.

On en déduit que le plan P a pour équation $5x+4y-z+d=0$.

Or A appartient à P, alors $10+12-0+d=0$; par suite, $d=-22$.

Donc **une équation cartésienne de P est $5x+4y-z-22=0$**.

b) $M(x\,;y\,;z)$, point d'intersection de d_2 et P, vérifient le système $\begin{cases}x=-5+2t'\\ y=-1+t'\\ z=5\\ 5x+4y-z-22=0\end{cases}$

Or $\begin{cases} x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \\ 5x+4y-z-22=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \\ 5(-5+2t')+4(-1+t')-5-22=0 \end{cases}$,

c'est-à-dire à $\begin{cases} x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \\ 14t'-56=0 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \\ 5x+4y-z-22=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-5+2\times 4=3 \\ y=-1+4=3 \\ z=5 \\ t'=4 \end{cases}$.

Par conséquent, **le point B, intersection de d_2 et P, a pour coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$**.

5) a) **Une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x=3+u \\ y=3-2u \\ z=5-3u \end{cases} \quad (u\in\mathbb{R})$**.

b) $M(x\ ;y\ ;z)$, point d'intersection de d_1 et Δ, s'il existe, vérifient le système $\begin{cases} 2+t=3+u \\ 3-t=3-2u \\ t=5-3u \end{cases}$.

Or $\begin{cases} 2+t=3+u \\ 3-t=3-2u \\ t=5-3u \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2+(5-3u)=3+u \\ 3-(5-3u)=3-2u \\ t=5-3u \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} 4u=4 \\ 5u=5 \\ t=5-3u \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} u=1 \\ t=2 \end{cases}$.

Par conséquent, **les droites d_1 et Δ sont sécantes en point C de coordonnées $(4\ ;\ 1;\ 2)$**.

c) La droite Δ est sécante à d_1 en C et est sécante à d_2 en B.
De plus, d'après la question 3), Δ est orthogonale à d_1 et à d_2.
Par conséquent, **Δ répond au problème posé**.

Exercice 3

Partie A : administration par voie intraveineuse

1) On est amené à résoudre l'équation $f(t)=\frac{20}{2}=10$.

Or $f(t)=10$ équivaut à $20e^{-0,1t}=10$, c'est-à-dire à $e^{-0,1t}=\frac{1}{2}$, ou encore à

$-0,1t=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$. Donc $t_{0,5}=\frac{-\ln(2)}{-0,1}=\mathbf{10\ln(2)}$.

2) On cherche à résoudre l'inéquation $f(t)\leq 0,2$.

Or $f(t)\leq 0,2$ équivaut à $e^{-0,1t}\leq 0,01$, c'est-à-dire à $-0,1t\leq \ln(0,01)$, c'est-à-dire à $t\geq \frac{\ln(0,01)}{-0,1}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{-0,1}\approx 46,05$. Par conséquent, **le médicament est éliminé à partir de 46 heures**.

3) D'après l'énoncé, $\text{ASC}=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$.

Or $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 20e^{-0,1t}\,dt = 20\int_0^x e^{-0,1t}\,dt = 20\left[\frac{1}{-0,1}e^{-0,1t}\right]_0^x = 20\left(\frac{1}{-0,1}e^{-0,1x} - \frac{1}{-0,1}\right) = 200\left(1-e^{-0,1x}\right)$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,1x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,1x} = 0$ (limite d'une fonction composée).

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = 200$ (par somme de limites).

Par conséquent, **l'ASC est égal à 200 μg.L^{-1}.h pour ce modèle**.

Partie B : administration par voie orale

1) La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout réel t positif, $\boldsymbol{g'(t)} = 20\left(-0,1e^{-0,1t} - (-1)e^{-t}\right) = 20e^{-t}\left(\frac{-0,1e^{-0,1t}}{e^{-t}} + 1\right) \boldsymbol{= 20e^{-t}\left(1-0,1e^{0,9t}\right)}$.

2) Comme $20e^{-t} > 0$ pour tout réel t, alors le signe de $g'(t)$ dépend de celui de $1-0,1e^{0,9t}$.

$1-0,1e^{0,9t} \geq 0$ équivaut à $0,1e^{0,9t} \leq 1$, c'est-à-dire à $e^{0,9t} \leq 10$, ou encore à $0,9t \leq \ln(10)$.

D'où $1-0,1e^{0,9t} \geq 0$ équivaut à $t \leq \frac{\ln(10)}{0,9}$.

$1-0,1e^{0,9t} \leq 0$ équivaut à $0,1e^{0,9t} \geq 1$, c'est-à-dire à $e^{0,9t} \geq 10$, ou encore à $0,9t \geq \ln(10)$.

D'où $1-0,1e^{0,9t} \leq 0$ équivaut à $t \geq \frac{\ln(10)}{0,9}$.

Par conséquent, **g est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\ln(10)}{0,9}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}\,;+\infty\right[$**.

On en déduit que la fonction g admet un maximum lorsque $t = \frac{\ln(10)}{0,9}$.

Or $\frac{\ln(10)}{0,9} \approx 2$ h 34 min ; **la concentration plasmatique du médicament est maximale au bout d'environ 2 h 34 min**.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

1) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n = 40 - 40\times 0,5^n$ »

→ *Initialisation* : Comme $40 - 40\times 0,5^1 = 40 - 20 = 20 = u_1$, on a bien $\mathcal{P}(1)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n = 40 - 40\times 0,5^n$.
Or $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$. D'où $u_{n+1} = 0,5\left(40 - 40\times 0,5^n\right) + 20 = 20 - 40\times 0,5^{n+1} + 20 = 40 - 40\times 0,5^{n+1}$
On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(1)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 40 - 40\times 0,5^n$**.

2) Comme $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$. Par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40}$ (par somme de limites).

3) On est amené à chercher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 38$.
Or $u_n \geq 38$ équivaut à $40 - 40 \times 0{,}5^n \geq 38$, c'est-à-dire à $-40 \times 0{,}5^n \geq -2$ ou encore à $0{,}5^n \leq 0{,}05$.
Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $0{,}5^n \leq 0{,}05$ équivaut à $n\ln(0{,}5) \leq \ln(0{,}05)$, c'est-à-dire à $n \geq \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}5)}$ ou encore à $n \geq 4{,}3$.
Par conséquent, **il faut au minimum 5 injections pour atteindre cet équilibre**.

Exercice 4 (enseignement obligatoire)

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1) Chaque angle au centre d'un polygone régulier à n côtés a pour mesure $\dfrac{2\pi}{n}$.

D'où l'angle A_6OB_6 a pour mesure $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. De plus, le triangle A_6OB_6 est isocèle en O.
Par conséquent, **A_6OB_6 est équilatéral**.

Comme le polygone est constitué de 6 triangles superposables et que l'aire du polygone est égale à 1, alors $6 \times aire(A_6OB_6) = 1$. Par suite, $\boldsymbol{aire(A_6OB_6) = \dfrac{1}{6}}$.

2) Soit H_6 le pied de la hauteur issue de B_6 dans le triangle A_6OB_6. Dans le triangle H_6OB_6 rectangle en H_6, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{H_6B_6}{OB_6}$, c'est-à-dire $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{H_6B_6}{r_6}$.

Par conséquent, **la hauteur du triangle A_6OB_6 est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2} r_6$**.

3) On sait que l'aire du triangle A_6OB_6 est égale à 1.

Or $aire(A_6OB_6) = \dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{H_6B_6 \times OA_6}{2} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times r_6 \times r_6}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times r_6^2$.

On en déduit que $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times r_6^2 = \dfrac{1}{6}$, c'est-à-dire $r_6^2 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Comme $r_6 \geq 0$, on obtient alors :

$\boldsymbol{r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

1) Soit H_n le pied de la hauteur issue de B_n dans le triangle A_nOB_n. Dans le triangle H_nOB_n rectangle en H_n, $\sin(\theta_n) = \dfrac{H_nB_n}{OB_n}$, c'est-à-dire $\sin(\theta_n) = \dfrac{H_nB_n}{r_n}$.

Donc **la hauteur issue de B_n dans le triangle A_nOB_n a pour longueur $r_n \sin(\theta_n)$**.

$\boldsymbol{aire(A_nOB_n)} = \dfrac{H_nB_n \times OA_n}{2} = \dfrac{r_n \sin(\theta_n) \times r_n}{2} = \boldsymbol{\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)}$.

2) Chaque angle au centre d'un polygone régulier à n côtés a pour mesure $\dfrac{2\pi}{n}$. Comme l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OB_n}\right)$ est orienté dans le sens direct, alors $\left(\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OB_n}\right)=\dfrac{2\pi}{n}$.

Comme l'aire du polygone P_n est égale à 1 et que les n triangles sont superposables, alors $n\times\dfrac{r_n^2\sin(\theta_n)}{2}=1$.

De plus, $\theta_n\in\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, d'où $\sin(\theta_n)\neq 0$. On en déduit que $r_n^2=\dfrac{2}{n\times\sin(\theta_n)}$, et $\theta_n=\dfrac{2\pi}{n}$.

Comme $r_n\geq 0$, alors $r_n=\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : étude de la suite (r_n)

1) • Comme $n\geq 4$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{4}$. On en déduit que $\dfrac{2\pi}{n}\leq\dfrac{2\pi}{4}$, c'est-à-dire que $\dfrac{2\pi}{n}\leq\dfrac{\pi}{2}<\pi$.

Comme n est un entier naturel, alors $\dfrac{2\pi}{n+1}>0$.

Enfin, $\dfrac{2\pi}{n+1}-\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{-2\pi}{n(n+1)}$ et $\dfrac{-2\pi}{n(n+1)}<0$ pour tout entier naturel n.

Par conséquent, **pour tout $n\geq 4$, $0<\dfrac{2\pi}{n+1}<\dfrac{2\pi}{n}<\pi$.**

• D'après ce qui précède et comme la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,\pi[$, alors $f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)<f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{\pi}$ est strictement positif, on en déduit que $\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)<\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Or la fonction racine carré est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, alors $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)}<\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$, c'est-à-dire $u_{n+1}<u_n$ pour tout $n\geq 4$.

Par conséquent, **la suite (r_n) est décroissante**.

2) Comme la suite (r_n) est décroissante et minorée par 0, alors **elle est convergente**.

3) **En sortie cet algorithme va afficher la valeur 11 pour n**.

Exercice 4 (enseignement de spécialité)

1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$ et $\dfrac{2+1}{3+2}=\dfrac{3}{5}$.

Le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale de l'arbre, aboutit à la fraction $\frac{3}{5}$.

3) a) $d(a+c)-c(b+d)=da+dc-cb-cd=da-cb$.

Donc, **si $ad-bc=1$, alors $d(a+c)-c(b+d)=1$**.

b) $M\times G=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$. Par suite, $\Delta_{M\times G}=d(a+c)-c(b+d)$.

Comme $\Delta_M=1$, alors d'après la question précédente, on en déduit que $\boldsymbol{\Delta_{M\times G}=1}$.

4) Pour toutes les matrices N de l'arbre de Stern-Brocot, on a $d(a+c)-c(b+d)=1$.

D'après le théorème de Bézout, on en déduit que les entiers $a+c$ et $b+d$ sont premiers entre eux. Dans ce cas, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

Par conséquent, **toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible**.

5) a)

Affichage		Gauche	**Droite**	**Gauche**	**Gauche**
m	4	**4**	**1**	**1**	**1**
n	7	**3**	**3**	**2**	**1**

b) **Il semble que l'algorithme fournisse le chemin à suivre à partir de la matrice unité afin d'obtenir la fraction $\frac{m}{n}$ donnée au départ.**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; la fraction est donc $\frac{3+1}{5+2}=\frac{4}{7}$.