Exercice 1

1) a) Comme $[EI]$ est la hauteur de la pyramide *ABCDE*, alors le triangle *AEI* est rectangle en *I*. D'après le théorème de Pythagore, $AE^2 = AI^2 + IE^2$.

Or *I* est le centre du carré *ABCD*, alors $AI = \frac{\sqrt{2} \times AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par suite, $IE^2 = AE^2 - AI^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Comme *IE* est une distance, on en déduit que $\boldsymbol{IE}\ \mathrm{Z}\ \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; d'où ***I* a pour coordonnées** $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \mathbf{0}\right)$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AK}$; d'où ***E* a pour coordonnées** $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)$.

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AK}$; d'où ***F* a pour coordonnées** $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \mathrm{J}\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)$.

b) Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (*ABE*) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Or $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 + (-2) \times 0 + \sqrt{2} \times 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \times \frac{1}{2} + (-2) \times \frac{1}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 - 1 + 1 = 0$.

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, alors $\vec{\boldsymbol{n}}$ **est normal au plan (*ABE*)**.

c) D'après la question précédente, (*ABE*) a pour équation $-2y + \sqrt{2}z + d = 0$.
Or *A* appartient au plan, d'où $d = 0$.
Donc **le plan (*ABE*) a pour équation** $\mathrm{J}\mathbf{2}\boldsymbol{y}\ \mathrm{H}\ \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{z}\ \mathrm{Z}\ \mathbf{0}$.

2) *M* a pour coordonnées $\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\ ;\ \frac{1+\frac{1}{2}}{2}\ ;\ \frac{0-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{-\sqrt{2}}{4}\right)$.

N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.

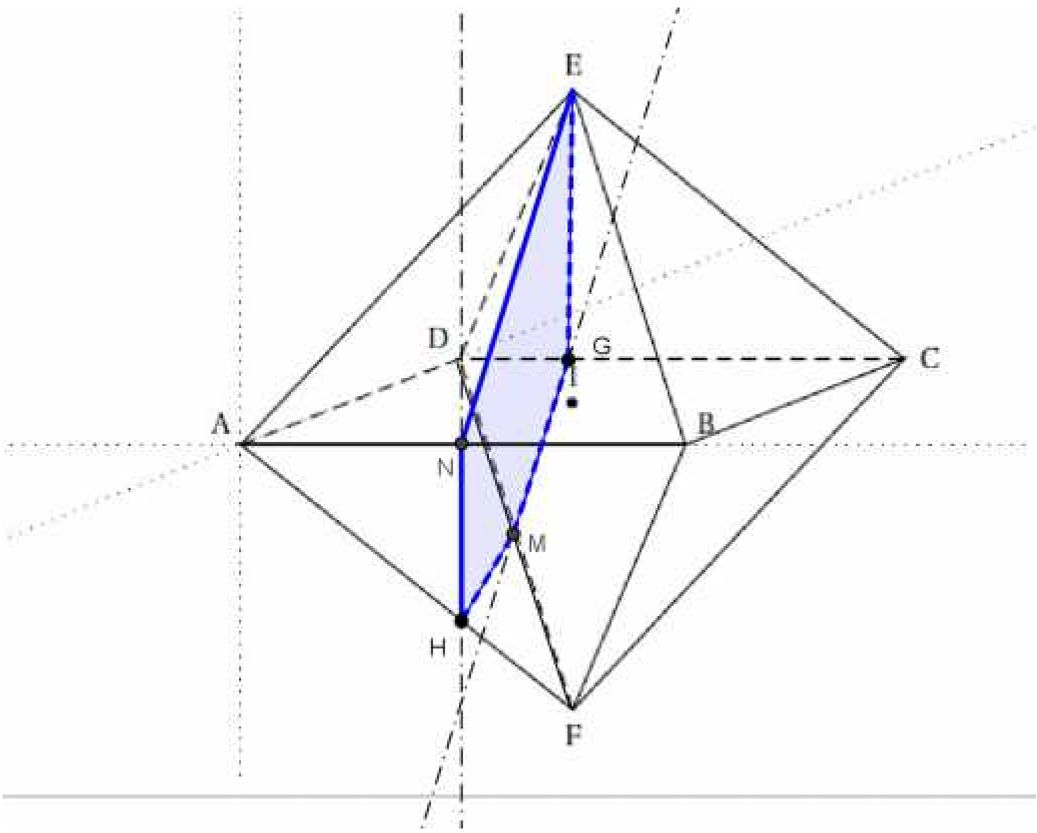
a) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FD} = 0 \times \left(0 - \frac{1}{2}\right) + (-2) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \times \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 - 1 + 1 = 0$ et

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (-2) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \times \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 - 1 + 1 = 0$.

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FC}$ du plan (*FCD*), alors $\vec{n}$ est normal au plan (*FCD*).
Par suite, $\vec{n}$ est normal aux plans (*ABE*) et (*FCD*). Par conséquent, **(*ABE*) et (*FCD*) sont parallèles**.

b) *M* appartient aux deux plans (*FDC*) et (*EMN*).
Les points *E* et *N* appartiennent aux plans (*ABE*) et (*EMN*). Par suite, ces deux plans se coupent selon la droite (*EN*).
Les plans (*ABE*) et (*FDC*) sont parallèles.
Or un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.
D'où **le plan (*EMN*) coupe le plan (*FDC*) selon une droite parallèle à la droite (*EN*) passant par *M***.

c)



Exercice 2

Partie A

1) Lancer une balle à droite est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}5$.
Cette épreuve est répétée 20 fois de de façon indépendante et identique, alors la variable aléatoire X, qui dénombre le nombre de balles envoyées à droite, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$.

Par suite, pour tout entier compris entre 0 et 20, $p(X = k) = \binom{20}{k} \times (0{,}5)^k \times (1 - 0{,}5)^{20-k}$.

La probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite est égale à
$\binom{20}{10} \times (0{,}5)^{10} \times (0{,}5)^{10} \approx$ **0,176**.

2) On cherche $p(5 \leq X \leq 10) = p(X \leq 10) - p(X \leq 4) \approx 0{,}5881 - 0{,}0059 = 0{,}5822$ (on utilise la calculatrice).
La probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite est égale à environ 0,582.

Partie B

Comme $n = 100 \geq 30$, $np = 100 \times 0,5 = 50 \geq 5$ et $n(1-p) = 100 \times 0,5 = 50 \geq 5$, alors les conditions de l'approximation normale sont vérifiées.

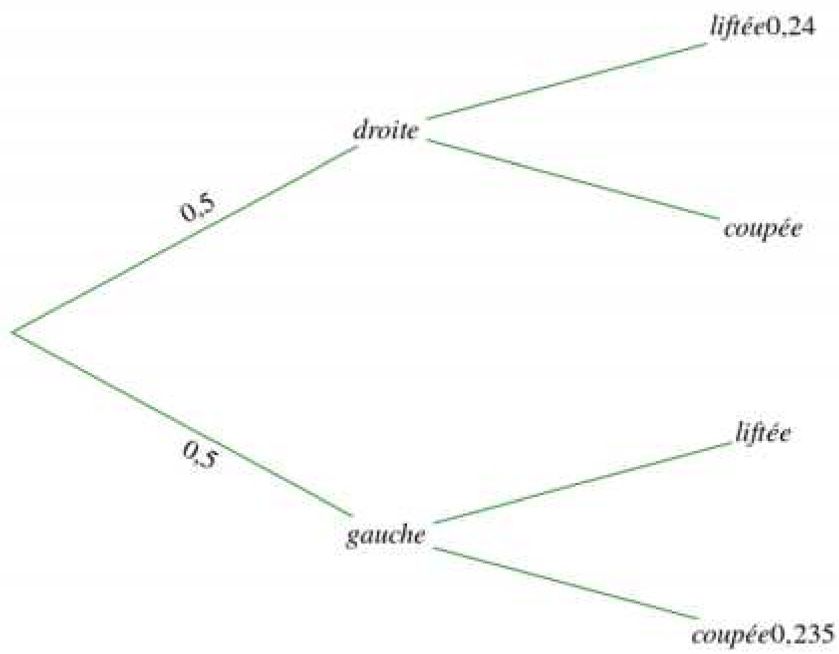
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est

$$I = \left[0,5 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}} \text{ ; } 0,5 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}}\right] = [0,402 \text{ ; } 0,598].$$

Or la fréquence observée est $f_{obs} = \frac{42}{100} = 0,42$ et, dans ce cas, $f_{obs} \in I$.

Par conséquent, **ses doutes ne sont pas justifiées**.

Partie C



On cherche $p_{coupée}(droite)$ qui égale à $\frac{p(droite \text{ et } coupée)}{p(coupée)}$.

- $p(droite \text{ et } coupée) = p(droite) \times p_{droite}(coupée) = 0,5 \times (1 - p_{droite}(liftée))$.

Or $p_{droite}(liftée) = \frac{p(droite \text{ et } liftée)}{p(droite)} = \frac{0,24}{0,5} = 0,48$; d'où :

$p(droite \text{ et } coupée) = 0,5 \times (1 - 0,48) = 0,26$.

- $p(coupée) = p(droite \text{ et } coupée) + p(gauchee \text{ et } coupée) = 0,26 + 0,235 = 0,495$.

- On en déduit que : $p_{coupée}(droite) = \frac{0,26}{0,495} \approx 0,525$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, la probabilité qu'elle soit envoyée à droite est environ égale à 0,525.

Exercice 3

Partie A

1) On a $f=\dfrac{1}{1+e^u}$ avec $u(x)=1-x$.

La fonction u est dérivable sur **R**, alors e^u est dérivable sur **R**.
La fonction $1+e^u$ est strictement positive sur **R**
D'où la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ 1]$.

Ainsi $f'=-\dfrac{\left(1+e^u\right)'}{\left(1+e^u\right)^2}=-\dfrac{u'e^u}{\left(1+e^u\right)^2}$ avec $u'(x)=-1$

D'où, $f'(x)=\dfrac{e^{1-x}}{\left(1+e^{1-x}\right)^2}$, pour tout x de $[0\ ;\ 1]$.

Comme e^{1-x} est strictement positif, alors $f'(x)>0$. Par conséquent, **la fonction *f* est strictement croissante sur $[0\ ;1]$**.

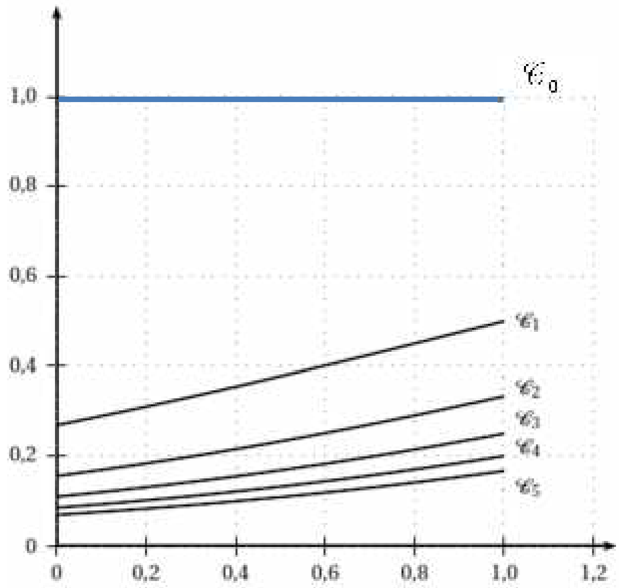
2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}=\dfrac{e^x}{e^x\left(1+e^{1-x}\right)}=\dfrac{e^x}{e^x+e^{x+1-x}}=\dfrac{e^x}{e^x+e^1}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e}}$**, pour tout réel x de $[0\ ;1]$**.

3) $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+e}\,\mathrm{d}x=\left[\ln\left(e^x+e\right)\right]_0^1=\ln\left(e^1+e\right)-\ln\left(e^0+e\right)=\ln(2e)-\ln(1+e)$.
Or $\ln(2e)=\ln(2)+\ln(e)=\ln(2)+1$.
Par conséquent, $\boldsymbol{I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(2)+1-\ln(1+e)}$.

Partie B

1)



2) Comme la fonction f_n est continue et strictement positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$, alors $\boldsymbol{u_n}$ **représente l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$**.

$$u_0 = \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1 - 0 = \mathbf{1}.$$

3) **Il semble que la suite (u_n) soit strictement décroissante**.

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\mathrm{d}x$. Or

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}} - \frac{1}{1+ne^{1-x}} = \frac{1+ne^{1-x} - 1 - (n+1)e^{1-x}}{\left[1+(n+1)e^{1-x}\right]\left[1+ne^{1-x}\right]} = \frac{-e^{1-x}}{\left[1+(n+1)e^{1-x}\right]\left[1+ne^{1-x}\right]}$$

Comme $\dfrac{-e^{1-x}}{\left[1+(n+1)e^{1-x}\right]\left[1+ne^{1-x}\right]} < 0$ pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et que la fonction $f_{n+1} - f_n$ est dérivable sur $[0 ; 1]$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n.

On en déduit que **la suite (u_n) soit strictement décroissante**.

4) Comme u_n est une aire, alors $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.

La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0, alors **elle est convergente**.

Exercice 4 (enseignement obligatoire)

1) X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; \sigma^2)$.

Comme la courbe en cloche est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu = 20$, alors $p(20 - 1{,}6 \leq Y \leq 20 + 1{,}6) = 0{,}34 + 0{,}34 = 0{,}68$.

Or $p(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$; d'où $\sigma = 1{,}6$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $p(Y \geq 23{,}2) \approx 0{,}223$.

L'affirmation 1 est donc fausse.

2) $|Z| = 1$ équivaut à $\left|\dfrac{iz}{z-2}\right| = 1$, c'est-à-dire à $|iz| = |z-2|$.

Or $|iz| = |i||z| = 1 \times |z| = |z|$. D'où $|Z| = 1$ équivaut à $|z| = |z-2|$.

Soit *B* le point de coordonnées (2 ; 0). Alors $|Z| = 1$ équivaut à $OM = BM$.

L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est la médiatrice du segment $[OB]$. Or *A* est le milieu de ce segment ; **l'affirmation 2 est donc vraie**.

3) Soit $z = x + iy$. Alors $Z = \dfrac{iz}{z-2} = \dfrac{i(x+iy)}{x+iy-2} = \dfrac{(-y+ix)(x-iy-2)}{(x-2)^2+y^2} = \dfrac{2y + i\left(x^2+xy-2x\right)}{(x-2)^2+y^2}$.

Donc Z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\dfrac{2y}{(x-2)^2+y^2} = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $y = 0$. **L'affirmation 3 est donc vraie**.

4) $f(x) = 0{,}5$ équivaut à $\dfrac{3}{4+6e^{-2x}} = 0{,}5$, c'est-à-dire à $2 + 3e^{-2x} = 3$, ou encore à $e^{-2x} = \dfrac{1}{3}$.

D'où $f(x)=0{,}5$ équivaut à $-2x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln(3)$, c'est-à-dire à $x=\frac{\ln(3)}{2}$.

L'affirmation 4 est donc vraie.

5) **L'affirmation 5 est fausse car l'algorithme affiche la valeur 0,55 en sortie**.

x	…	0,53	0,54	0,55
y	…	0,49352375	0,49688839	0,50023123

Exercice 4 (enseignement de spécialité)

1) Si n est solution de ce système, alors $\begin{cases} n\equiv 1 \quad [5] \\ n\equiv 3 \quad [4] \end{cases}$.

Dans ce cas, $\begin{cases} n-11\equiv -10 \quad [5] \\ n-11\equiv -8 \quad [4] \end{cases}$. Or $-10\equiv 0 \quad [5]$ et $-8\equiv 0 \quad [4]$.

Donc, si n est solution de ce système, alors $\begin{cases} n-11\equiv 0 \quad [5] \\ n-11\equiv 0 \quad [4] \end{cases}$.

L'affirmation 1 est donc vraie.

2) Soit k un entier relatif. $11+20k=1+10+20k=1+5(2+4k)$.

Comme $2+4k$ est un entier, alors $11+20k\equiv 1 \quad [5]$.

$11+20k=3+8+20k=3+4(2+5k)$

Comme $2+5k$ est un entier, alors $11+20k\equiv 3 \quad [4]$.

L'affirmation 2 est donc vraie.

3) Soit un entier relatif n est solution du système, alors il existe des entiers p et q tels que $n=1+5p$ et $n=3+4q$. D'où $5p-4q=2$ (1).

Le couple $(2\,;\,2)$ est une solution particulière de l'équation (1) car $5\times 2-4\times 2=2$.

Soit $(p\,;\,q)$ une solution de (1). Ce couple est solution du système $\begin{cases} 5p-4q=2 \\ 5\times 2-4\times 2=2 \end{cases}$.

En soustrayant termes à termes, on obtient l'égalité suivante : $5(p-2)-4(q-2)=0$, c'est-à-dire $5(p-2)=4(q-2)$.

On en déduit que 4 divise $5(p-2)$. Or 4 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 4 divise $(p-2)$.

Il existe donc un entier k tel que $p-2=4k$, c'est-à-dire $p=2+4k$.

Donc $n=1+5p=1+5(2+4k)=11+20k$..

L'affirmation 3 est donc vraie.

4) **L'affirmation 4 est donc fausse**. Car a prend la valeur 0,3a + 0,8b.

5) La matrice de transition est : $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; on a $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Par suite, on obtient (on pourrait faire un raisonnement par récurrence) que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = A^4 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5625 & 0{,}5 \\ 0{,}4375 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.
L'affirmation 5 est donc vraie.

Exercice 5

1) a) $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2} i z_n + 5 - (4+2i) = \frac{1}{2} i z_n + 1 - 2i = \frac{1}{2} i \left(z_n + \frac{1-2i}{\frac{1}{2} i} \right) = \frac{1}{2} i \left(z_n - 2i(1-2i) \right)$.

D'où $u_{n+1} = \frac{1}{2} i (z_n - 4 - 2i) = \boldsymbol{\frac{1}{2} i (z_n - z_A)}$ **, pour tout entier naturel n**.

b) D'après la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} i$ et de premier terme $u_0 = z_0 - (4+2i) = -4 - 2i$.

Par conséquent, $u_n = u_0 \times q^n = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2} i \right)^n (-4 - 2i)}$ **, pour tout entier naturel n**.

2) L'affixe de $\overrightarrow{AM_n}$ est $z_n - 4 - 2i = u_n$, et celui de $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ est $z_{n+4} - 4 - 2i = u_{n+4}$.

Or $u_{n+4} = q^{n+4-n} \times u_n = \left(\frac{1}{2} i \right)^4 \times u_n = \frac{1}{16} \times u_n$, pour tout entier naturel n.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AM_n}$.

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ sont colinéaires.
Par conséquent, **pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés**.