Centres étrangers

Exercice 1

1) On cherche $p(X \geq 187)$ à l'aide de la calculatrice. On obtient : $p(X \geq 187) \approx 0{,}9032$.
Par conséquent, **l'affirmation 1 est vraie**.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \cos(x)$.

f est dérivable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 1 + \sin(x)$.

Or pour tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$; d'où $1 \leq 1 + \sin(x) \leq 2$.

Par suite, pour tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc continue (puisqu'elle est dérivable) et strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $0 \in \left[f(0)\ ;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[-1\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

L'affirmation 2 est vraie.

3) Résolvons le système $\begin{cases} 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} 1 + 2t = -5(4t - 4) + 3 \\ 2 - 3t = 2(4t - 4) \\ t' = 4t - 4 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} 22t = 22 \\ 11t = 10 \\ t' = 4t - 4 \end{cases}$, ou encore à

$\begin{cases} t = \frac{22}{22} = 1 \\ t = \frac{10}{11} \\ t' = 4t - 4 \end{cases}$; ce qui est impossible.

Il n'existe donc pas de couple solution du système $\begin{cases} 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{cases}$. **L'affirmation 3 est fausse**.

4) Soit $\vec{u}(2\ ; -3\ ;\ 4)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$.

Soit $\vec{n}(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

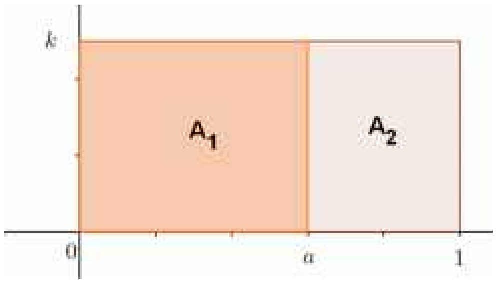
$\mathscr{D}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Or $\vec{u}\cdot\vec{n} = 2\times1+(-3)\times2+4\times1=0$; donc $\mathcal{D}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}$. **L'affirmation 4 est vraie**.

Exercice 2

Partie A : étude de quelques exemples

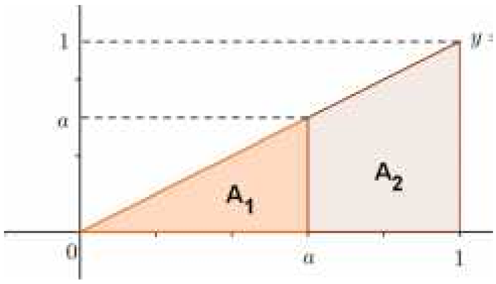
1) a)



Soit f la fonction constante strictement positive $x \mapsto k$.
$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $a\times k=(1-a)\times k$, c'est-à-dire à $a=1-a$, ou encore à $a=0{,}5$.

Dans le cas où f est une fonction constante strictement positive, la condition (*E*) est remplie pour un unique réel $a = 0{,}5$.

b)



Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=x$.

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $\dfrac{a\times a}{2}=\dfrac{(1-a)\times(a+1)}{2}$,
c'est-à-dire à $a^2=1-a^2$, ou encore à $a=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car $a>0$.

Dans le cas où f est la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=x$, la condition (*E*) est remplie pour un unique réel $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) a) $\mathcal{A}_1 = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire à $F(a)-F(0)=F(1)-F(a)$ où F est une primitive de f sur [0 ; 1].
Or $F(a)-F(0)=F(1)-F(a)$ équivaut à $2F(a)=F(0)+F(1)$.

Donc **$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $F(a)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$**. **La réciproque est donc vraie**.

3) a) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=e^x$.
Une primitive de f sur [0 ; 1] est la fonction F définie par $F(x)=e^x$.

D'après la question précédente, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $\left[e^x\right]_0^a=\left[e^x\right]_a^1$, c'est-à-dire à $e^a-1=e^1-e^a$, ou encore à $e^a=\dfrac{1+e}{2}$.

Par conséquent, **la condition (*E*) est remplie pour un unique réel $a=\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$**.

b) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Une primitive de f sur [0 ; 1] est la fonction F définie par $F(x)=-\dfrac{1}{x+2}$.

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $\left[-\dfrac{1}{x+2}\right]_0^a = \left[-\dfrac{1}{x+2}\right]_a^1$, c'est-à-dire à $-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{a+2}$.

Or $-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{a+2}$ équivaut à $\dfrac{2}{a+2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$, c'est-à-dire à $a+2 = \dfrac{12}{5}$, ou encore à $a = \dfrac{12}{5} - 2 = \dfrac{2}{5}$. Par conséquent, **la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient**.

Partie B : utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

1) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 4 - 3x^2$.

Une primitive de f sur [0 ; 1] est la fonction F définie par $F(x) = 4x - x^3$.

Si a est un réel satisfaisant la condition (*E*), alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$.

Or $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ équivaut à $4a - a^3 = \dfrac{0+3}{2}$, c'est-à-dire à $a = \dfrac{3}{8}+\dfrac{a^3}{4}$.

Par conséquent, **si a est un réel satisfaisant la condition (*E*), alors a est solution de l'équation $a = \dfrac{3}{8}+\dfrac{a^3}{4}$**.

2) a) $\boldsymbol{u_1} = g(u_0) = g(0) = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$.

b) La fonction g est dérivable sur **R** en tant que fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur [0 ; 1].

Pour tout x de [0 ; 1], $g'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$. Comme $g'(x) \geq 0$ pour tout réel x, alors **la fonction g est croissante sur [0 ; 1]**.

c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout *n* de **N**, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{3}{8}$, on a bien u_0 et u_1 qui appartiennent à [0 ; 1]

Par suite, on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Comme la fonction g est croissante sur [0 ; 1], alors $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dfrac{5}{8}$. Donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Donc **pour tout n de N, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$**.

d) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, **elle est donc convergente vers un réel ℓ**.

Comme $u_{n+1} = g(u_n) = \dfrac{u_n^3}{4}+\dfrac{3}{8}$, par passage aux limites, on obtient : $\ell = \dfrac{\ell^3}{4}+\dfrac{3}{8}$, c'est-à-dire que ℓ est solution de l'équation $x = \frac{3}{8} + \frac{x^3}{4}$.

D'après la question 1) de la partie B, on en déduit que $\ell = \boldsymbol{a}$.

e) D'après la calculatrice, on obtient : $\boldsymbol{u_{10} \approx 0{,}38980784}$.

Exercice 3

Partie A : nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1) a) Interroger une personne qui accepte de répondre à la question posée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}6$.

Cette épreuve est répétée de façon identique et indépendante 700 fois.

Donc **X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(700\ ;\ 0{,}6)$**.

Pour tout k entier naturel compris entre 0 et 700, $p(X = k) = \binom{700}{k}(0{,}6)^k(0{,}4)^{700-k}$.

b) $p(X \geq 400) = 1 - p(X \leq 399) \approx 0{,}9427260756$ d'après la calculatrice.

Donc **la meilleure valeur approchée de $p(X \geq 400)$ est 0,94**.

2) Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes acceptant de répondre au sondage parmi n personnes.

Y suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n\ ;\ 0{,}6)$.

On souhaite que $p(Y \geq 400) > 0{,}9$, c'est-à-dire que $p(Y \leq 399) < 0{,}1$.

n	700	699	698	697	696	695	694	693
$p(Y \leq 399)$	0,057	0,063	0,068	0,074	0,081	0,088	0,095	0,0103

On en déduit que l'institut doit interroger au minimum 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : proportion de personnes favorables au projet dans la population

1) Supposons que les conditions de l'approximation normale sont vérifiées.

La fréquence observée est $\frac{29}{100} = 0{,}29$.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale est $\left[\boldsymbol{0{,}29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0{,}29 + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right]$.

2) L'intervalle précédent a pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Or $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04$ équivaut à $\sqrt{n} \geq \frac{2}{0{,}04}$, c'est-à-dire à $n \geq 2\,500$.

Donc **la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04 est 2 500**.

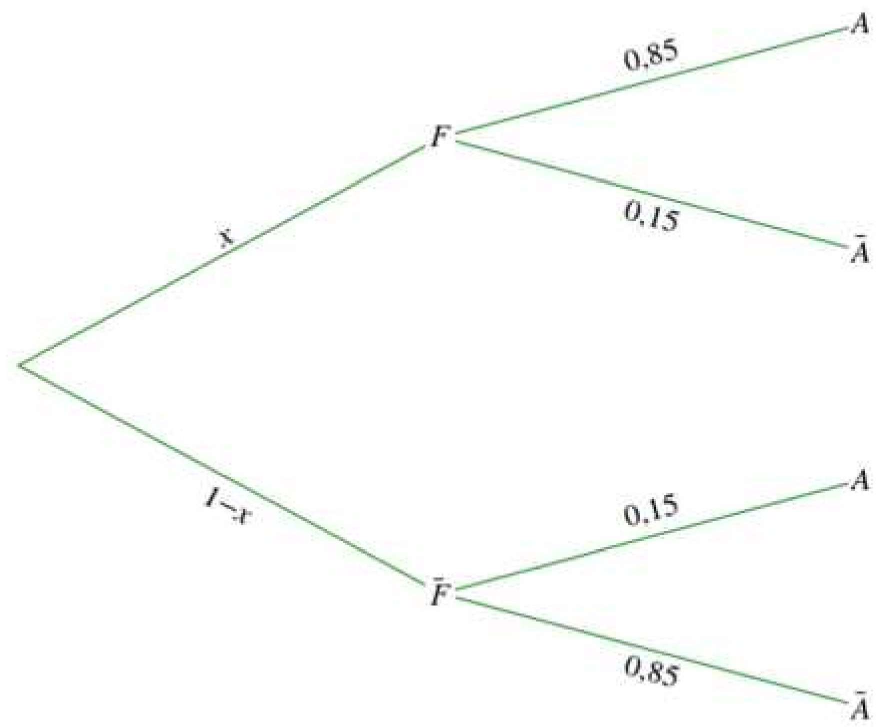
Partie C : correction due à l'insincérité de certaines réponses

1) L'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

D'où $p_F\left(\overline{A}\right)=\dfrac{15}{100}=0{,}15$ et $\boldsymbol{p_{\overline{F}}\left(A\right)}=\dfrac{15}{100}=\mathbf{0{,}15}$.

Par suite, $\boldsymbol{p_F\left(A\right)}=1-p_F\left(\overline{A}\right)=\mathbf{0{,}85}$.

2) a)



b) $p\left(A\right)=0{,}29$ et $p\left(A\right)=p\left(F\cap A\right)+p\left(\overline{F}\cap A\right)=x\times 0{,}85+\left(1-x\right)\times 0{,}15=0{,}15+0{,}7x$

D'où $\mathbf{0{,}15+0{,}7\boldsymbol{x}=0{,}29}$. Par suite, $\boldsymbol{x}=\mathbf{0{,}2}$.

3) On cherche $p\left(F\cap A\right)$. Or $p\left(A\right)=p\left(F\cap A\right)=x\times 0{,}85=0{,}2\times 0{,}85=0{,}17$.

Par conséquent, **parmi les personnes ayant répondu au sondage, 20 % d'entre elles sont réellement favorables au projet**.

Exercice 4 (enseignement obligatoire)

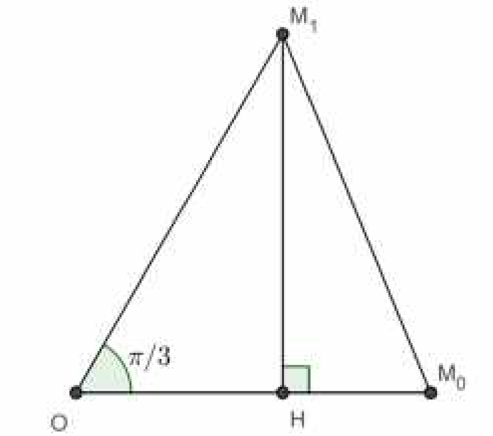
Partie A : ligne brisée formée à partir de sept points

1) $z_1=\left(1+\dfrac{1}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{7}{6}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La forme algébrique de $\boldsymbol{z_1}$ est donc $\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}+\boldsymbol{i}\dfrac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{12}}$.

2) $\boldsymbol{z_0}=\left(1+\dfrac{0}{6}\right)e^{0}=\mathbf{1}$ et $\boldsymbol{z_6}=\left(1+\dfrac{6}{6}\right)e^{2i\pi}=2\times 1=\mathbf{2}$ sont bien des entiers.

3)



Dans le triangle rectangle OHM_1, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{HM_1}{OM_1}=\frac{HM_1}{\frac{7}{6}}.$$

D'où $HM_1=\frac{7}{6}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

La longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

L'aire de ce triangle est égale à $\frac{OM_0\times HM_1}{2}=\frac{1\times\frac{7\sqrt{3}}{12}}{2}=\mathbf{\frac{7\sqrt{3}}{24}}$.

Partie B : ligne brisée formée à partir de n + 1 points

1) $\mathbf{OM_k}=|z_k|=\left|1+\frac{k}{6}\right|\times\left|e^{\frac{2ki\pi}{6}}\right|=\mathbf{1+\frac{k}{6}}$ car $1+\frac{k}{6}>0$ **pour tout k entier compris entre 0 et n.**

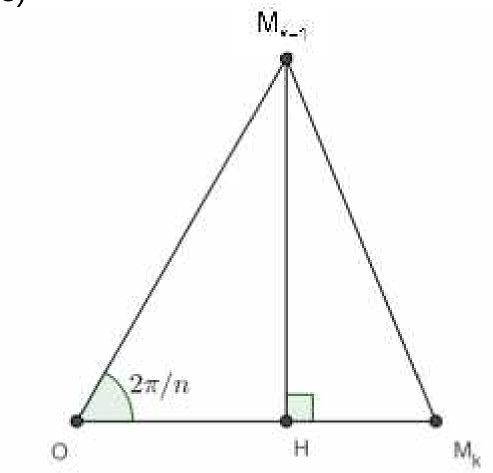
2) Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$: $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_k}\right)=\arg(z_k)=\frac{2k\pi}{n}$ et

$\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)=\arg(z_{k+1})=\frac{2(k+1)\pi}{n}$.

$\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)=\left(\overrightarrow{OM_k},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

On en déduit que $\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)=\frac{2(k+1)\pi}{n}-\frac{2k\pi}{n}=\mathbf{\frac{2\pi}{n}}$.

3)



Dans le triangle rectangle OHM_{k+1}, on a :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{HM_{k+1}}{OM_{k+1}}=\frac{HM_{k+1}}{1+\frac{k+1}{6}}.$$

D'où **la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à** $\left(1+\frac{k+1}{6}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

4)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	**5,731**	**6,848**

5) L6 : Tant que $\boldsymbol{A < 7{,}2}$
L13 : Afficher $\boldsymbol{n}$

Exercice 4 (enseignement de spécialité)

Partie A : chiffrement de Hill

• « HI » est codé par la matrice $X=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$. Par suite, $Y=AX=\begin{pmatrix}5&2\\7&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51\\105\end{pmatrix}$, puis $R=\begin{pmatrix}25\\1\end{pmatrix}$. Donc « HI » est codé en « ZB ».

• « LL » est codé par la matrice $X=\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$. Par suite, $Y=AX=\begin{pmatrix}5&2\\7&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}77\\154\end{pmatrix}$, puis $R=\begin{pmatrix}25\\24\end{pmatrix}$. Donc « LL » est codé en « ZY ».

Donc, **« HILL » est codé en « ZBZY »**.

Partie B : quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1) 26 et a sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au+26\times v=1$. Par suite, $au=1-26\times v$.
On en déduit que $au\equiv 1\ [26]$.

Par conséquent, **il existe un entier relatif u tel que $au\equiv 1\ [26]$**.

2) a)

u	0	1	2	**3**	**4**	**5**
r	0	21	**16**	**11**	**6**	**1**

b) L'algorithme précédent permet de chercher un entier u tel que $21\times u$ ait pour reste 1 dans la division euclidienne par 26.
D'après la question précédente, on en déduit que $\boldsymbol{5\times 21\equiv 1\ [26]}$.

3) a) $\boldsymbol{12A-A^2}=\begin{pmatrix}60&24\\84&84\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&2\\7&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&2\\7&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60&24\\84&84\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}39&24\\84&63\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}21&0\\0&21\end{pmatrix}}$.

b) $12A-A^2=21I$, alors $(12I-A)\times A=21I$. Donc $\boldsymbol{B\times A=21I}$ avec $\boldsymbol{B=12I-A=\begin{pmatrix}7&-2\\-7&5\end{pmatrix}}$.

c) Si $AX=Y$, alors $B\times A\times X=B\times Y$; c'est-à-dire $21I\times X=B\times Y$
Par conséquent, **si $AX=Y$, alors $21X=BY$**.

Partie C : déchiffrement

1) D'après la partie B, si $Y=AX$, alors $21X=BY$.
Or $21X=BY$ équivaut à $\begin{pmatrix}21x_1\\21x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2\\-7&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7y_1-2y_2\\-7y_1+5y_2\end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\begin{cases}21x_1=7y_1-2y_2\\21x_2=-7y_1+5y_2\end{cases}}$.

2) Dans la question 2) b) de la **partie B**, on a trouvé que $5\times 21 \equiv 1 \quad [26]$.

$\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 21\times 5x_1 = 5(7y_1 - 2y_2) \\ 21\times 5x_2 = 5(-7y_1 + 5y_2) \end{cases}$, c'est-à-dire à

$\begin{cases} 21\times 5x_1 = 35y_1 - 10y_2 \\ 21\times 5x_2 = -35y_1 + 25y_2 \end{cases}$.

Or $y_1 \equiv r_1 \quad [26]$, $y_2 \equiv r_2 \quad [26]$, $5\times 21 \equiv 1 \quad [26]$, $35 \equiv 9 \quad [26]$, $-10 \equiv 16 \quad [26]$, $-35 \equiv 17 \quad [26]$ et $25 \equiv 25 \quad [26]$.

Donc $\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$ équivaut à $\boldsymbol{\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \quad [26] \end{cases}}$.

3) ● « VL » est codé par la matrice $R = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$.

En utilisant la question précédente, on en déduit que $\begin{cases} x_1 \equiv 365 \quad [26] \\ x_2 = 632 \quad [26] \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x_1 \equiv 365 \quad [26] \\ x_2 = 632 \quad [26] \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_1 \equiv 1 \quad [26] \\ x_2 = 8 \quad [26] \end{cases}$. Donc « VL » est décodé en « BI ».

● « UP » est codé par la matrice $R = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

En utilisant la question précédente, on en déduit que $\begin{cases} x_1 \equiv 420 \quad [26] \\ x_2 = 715 \quad [26] \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x_1 \equiv 420 \quad [26] \\ x_2 = 715 \quad [26] \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_1 \equiv 4 \quad [26] \\ x_2 = 13 \quad [26] \end{cases}$. Donc « UP » est décodé en « EN ».

Par conséquent, **« VLUP » est décodé en « BIEN »**.