



Exercice 1. Probabilités

4 points

Partie A

Commun à tous les candidats

1. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne contienne pas plus de 3% de cadenas défectueux.

- **1. Analyse des données :**
 - « Sur un échantillon de $n = 500$ cadenas haut de gamme. Il est constaté que 19 d'entre eux sont défectueux. ».
Donc la fréquence observée de cadenas défectueux est

$$f = 19 \div 500 = 0,038 \text{ soit } \boxed{f = 0,038}$$
 - L'entreprise affirme que $p = 3\%$ de ses cadenas haut de gamme sont défectueux.

- **2. Intervalle de fluctuation :**

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 500$, $p = 3\%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 500 \geq 30 \\ \checkmark & np = 500 \times 0,03 = 15 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 500 \times 0,97 = 485 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,03 - 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} ; 0,03 + 1,96 \frac{\sqrt{0,03 \times 0,97}}{\sqrt{500}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,01505$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit 0,015.
- $p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,04495$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit 0,045.

$$\boxed{I \approx [0,015 ; 0,045]}$$

- **Conclusion**

La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0,038 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question le fait que le stock ne contienne pas plus de 3% de cadenas défectueux.



2. Le responsable souhaite exprimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix. Il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas et en trouve 39 de défectueux.
Donner un intervalle de confiance au seuil 95% de cette proportion.

• 1. Analyse des données :

« Sur un échantillon de $n = 500$ cadenas premier prix. Il est constaté que 39 d'entre eux sont défectueux. ». Donc la fréquence observée de cadenas défectueux est

$$f = 39 \div 500 = 0,078 \text{ soit } \boxed{f = 0,078}$$

• 2. Intervalle de confiance :

Théorème 2 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p .

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 500$, $f = 7,8\%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 500 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 500 \times 0,078 = 39 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 500 \times 0,922 = 461 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right]$$

Soit puisque les bornes sont :

- $0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,03328$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} près soit 0,033.
- $0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,12272$. On arrondit la borne supérieure par excès 10^{-3} près soit 0,123.

$$\boxed{I \approx [0,033 ; 0,123]}$$

- **Conclusion** : Un intervalle de confiance au seuil 95% de cette proportion de cadenas défectueux de premier prix est

$$\boxed{[3,3\% ; 12,3\%]}$$



Partie B

Le nombre X de cadenas *premier prix* peut être modélisé par une loi normale de paramètres $\mu = 750$ et $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leq X \leq 775)$.

La calculatrice peut donner directement le résultat. On peut cependant simplifier le calcul en appliquant la propriété suivante :

Propriété 1 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683 \quad : (1)$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954 \quad : (2)$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997 \quad : (3)$$

Ici la variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu = 750; \sigma^2 = 25^2)$. On a donc ici d'après la relation (1) de la propriété 1 :

$$P(725 \leq X \leq 775) = P(750 - 25 \leq X \leq 750 + 25)$$

$$P(725 \leq X \leq 775) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$$

En appliquant la relation (1) de la propriété 1 on a donc :

$$P(725 \leq X \leq 775) \approx 0,683$$

2. Le propriétaire veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock pour que la probabilité d'être en rupture de stock soit inférieur à 0,05. Déterminer la plus petite valeur de n remplissant cette condition.

Soit n le nombre de cadenas en stock. Puisque la variable X désigne le nombre de cadenas *premier prix* vendus par mois, on cherche la plus petite valeur de n telle que $P(X > n) = 0,05$.

Or on a :

$$P(X > n) = 1 - P(X \leq n) = 0,05 \iff P(X \leq n) = 1 - 0,05 = 0,95$$

La calculatrice donne alors :

$$n \approx 791,1$$

Et puisque n est un nombre entier, le plus petit entier n qui vérifie cette condition est $n = 792$.

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TISat.invNorm}(0.95, 750, 25) \approx 791,121\,340\,648$$

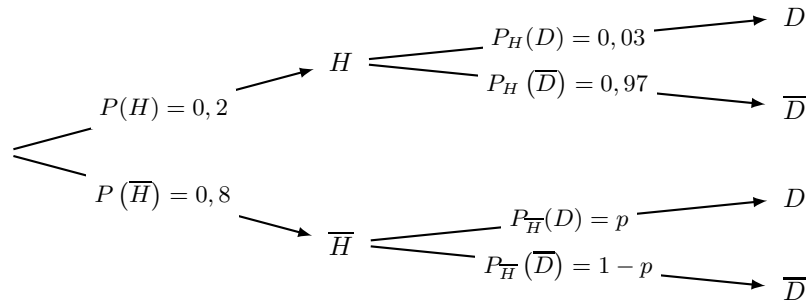


Partie C

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

On note H l'évènement « le cadenas prélevé est *haut de gamme* », D l'évènement « le cadenas prélevé est défectueux ».

- « 80% des cadenas sont *premier prix* » soit : $P(H) = 0,2$ et $P(\overline{H}) = 0,8$.
- « 3% des cadenas *haut de gamme* sont défectueux » soit : $P_H(D) = 0,03$ et $P_H(\overline{D}) = 0,97$.
- « 7% des cadenas sont défectueux » soit : $P(D) = 0,07$ et $P(\overline{D}) = 0,93$.
- p est la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux soit : $P_{\overline{H}}(D) = p$ et $P_{\overline{H}}(\overline{D}) = 1 - p$.



2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire p .

On cherche $P(D)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H})$$

$$P(D) = P(H) \times P_H(D) + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(D)$$

$$P(D) = 0,2 \times 0,03 + 0,8 \times p$$

$$P(D) = 0,006 + 0,8p$$

Or puisque d'après les données $P(D) = 0,07$ on a :

$$P(D) = 0,006 + 0,8p = 0,07 \iff p = \frac{0,07 - 0,006}{0,8} = 0,08 = 8\%$$

Le résultat est-il cohérent avec le résultat de la question A-2. ?

On avait montré qu'un intervalle de confiance au seuil 95% de cette proportion p de cadenas défectueux de *premier prix* est $[3,3\% ; 12,3\%]$. Or la proportion trouvée appartient bien à cet intervalle, le résultat est bien cohérent.

$$p = 8\% \in [3,3\% ; 12,3\%]$$

3. Le cadenas prélevé est en bon état, calculer la probabilité qu'il soit *haut de gamme*.

On cherche la probabilité $P_{\overline{D}}(H)$ or :

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(\overline{D} \cap H)}{P(\overline{D})}$$

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P_H(\overline{D}) \times P(H)}{P(\overline{D})}$$

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{0,97 \times 0,2}{0,93}$$

Soit :

$$P_{\overline{D}}(H) \approx 0,209$$



Exercice 2. Vrai/Faux Complexes

4 points

Commun à tous les candidats

1. On note S l'ensemble des points m d'affixe z tels que :
- $$\begin{cases} |z - 1| = |z - i| \\ |z - (3 + 2i)| \leq 2 \end{cases}$$

Affirmation 1 (Vraie)

L'ensemble S est le segment $[A ; B]$.

- Le cercle tracé est de centre E , de coordonnées $(3 ; 2)$, donc d'affixe $E(3 + 2i)$ et de rayon 2. Le disque \mathcal{D} de centre E et de rayon 2 est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $EM = |z - z_E| \leq 2$ soit :

$$\mathcal{D} = \{M(z) ; |z - (3 + 2i)| \leq 2\}$$

- En notant $I(1)$ et $J(i)$, l'ensemble \mathcal{D}' des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |z - i|$ est :

$$\mathcal{D}' = \{M(z) ; MI = MJ\}$$

Ce qui correspond à la première bissectrice du repère, la droite d'équation $y = x$.

- L'ensemble S est donc l'intersection du disque \mathcal{D} et de la droite \mathcal{D}' , c'est à dire le segment $[A ; B]$.
L'affirmation 1 est vraie.

2.

Affirmation 2 (Fausse)

Le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est un réel.

On va exprimer le complexe $(\sqrt{3} + i)$ sous forme exponentielle.

$$\left\{ \begin{array}{l} |(\sqrt{3} + i)| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ (\sqrt{3} + i) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ = 2 \times \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \frac{\pi}{6} \right) \end{array} \right. \implies (\sqrt{3} + i) = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{1515} &= \left(2 e^{i \frac{\pi}{6}} \right)^{1515} \\ (\sqrt{3} + i)^{1515} &= 2^{1515} e^{i \frac{1515\pi}{6}} \end{aligned}$$

Or par division euclidienne de 1515 par 6 on a : $1515 = 6 \times 252 + 3$:

$$(\sqrt{3} + i)^{1515} = 2^{1515} \times \underbrace{e^{i 252\pi}}_1 \times \underbrace{e^{i \frac{\pi}{2}}}_i$$

$$\boxed{(\sqrt{3} + i)^{1515} = 2^{1515} i \notin \mathbb{R}}$$

L'affirmation 2 est donc fausse.



3. On donne $E(2; 1; -3)$, $F(1; -1; 2)$ et $G(-1; 3; 1)$.

Affirmation 3 (Vraie)

Une représentation paramétrique de la droite (EF) est
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t - 3 \\ z = -10t + 7 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Notons (d) la droite dont une équation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t - 3 \\ z = -10t + 7 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- **Montrons que $E(2; 1; -3) \in (d)$.**

Pour $t = 1$ on a :

$$\begin{cases} x = 2 \times 1 = 2 \\ y = 4 \times 1 - 3 = 1 \\ z = -10 \times 1 + 7 = -3 \end{cases} \implies E(2; 1; -3) \in (d)$$

- **Montrons que $F(1; -1; 2) \in (d)$.**

Pour $t = 0,5$ on a :

$$\begin{cases} x = 2 \times 0,5 = 1 \\ y = 4 \times 0,5 - 3 = -1 \\ z = -10 \times 0,5 + 7 = 2 \end{cases} \implies F(1; -1; 2) \in (d)$$

- **Conclusion :** De ce fait la droite (d) est bien la droite (EF) , l'affirmation 3 est vraie

4.

Affirmation 4 (Vraie)

Une mesure de l'angle géométrique \widehat{FEG} , arrondie au degré, est 50° .

On va ici utiliser le fait que dans le repère orthonormé donné on a par définition :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \|\overrightarrow{EF}\| \times \|\overrightarrow{EG}\| \times \cos \widehat{FEG}$$

Or :

$$\begin{cases} E(2; 1; -3) \\ F(1; -1; 2) \\ G(-1; 3; 1) \end{cases} \implies \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc la norme et le produit scalaire des deux vecteurs :

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 3 - 4 + 20 = 19 \\ \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30} \\ \|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29} \end{cases}$$

Soit

$$\cos \widehat{FEG} = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{\|\overrightarrow{EF}\| \times \|\overrightarrow{EG}\|} = \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} \implies \widehat{FEG} = \arccos \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} \approx 49,9^\circ \approx 50^\circ$$

L'affirmation 4 est vraie.



Exercice 3. Suites

7 points

Commun à tous les candidats

On cherche à étudier la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

1. a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée de fonctions dérivables.

En appliquant la formule de dérivation de l'exponentielle composée :

$$(e^u)' = u' e^u \text{ avec } u \text{ dérivable sur } \mathbb{R}$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) &= (e^{2x})' - (e^x)' - x' \\ g'(x) &= \underline{2e^{2x} - e^x - 1} \end{aligned}$$

D'autre part on a par développement :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} ; (e^x - 1)(2e^x + 1) &= 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 \\ &= \underline{2e^{2x} - e^x - 1} \end{aligned}$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)}$$

1. b. Déterminer les variations de g et donner la valeur de son minimum.

On a montré que la dérivée g' s'exprimait comme un produit de deux facteurs.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$$

Le facteur $(2e^x + 1)$ est strictement positif pour tout réel x puisque l'exponentielle est strictement positive. Le signe de $g'(x)$ dépend donc uniquement du signe du premier facteur $(e^x - 1)$.

- On a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \iff (e^x - 1) = 0 \\ g'(x) &= 0 \iff e^x = 1 \end{aligned}$$

En composant par la fonction \ln définie sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 0 \iff x = 0$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{g'(x) = 0 \iff x = 0}$$

- En outre pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &> 0 \iff e^x - 1 > 0 \\ g'(x) &> 0 \iff e^x > 1 \end{aligned}$$

La fonction \ln étant croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a par composition :

$$g'(x) > 0 \iff x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{g'(x) > 0 \iff x > 0}$$

En conséquence :

$$\left. \begin{aligned} g'(x) &> 0 \iff x > 0 \\ g'(x) &= 0 \iff x = 0 \end{aligned} \right\} \implies g'(x) < 0 \iff x < 0$$

La fonction g est donc croissante sur \mathbb{R}_+ et décroissante sur \mathbb{R}_- .

Son minimum est donc atteint en $x = 0$ et vaut $f(0) = 0$.

1. c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}; (u_n) : \begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = e^{2u_n} - e^{u_n} \end{cases} \quad \text{et } \forall x \in \mathbb{R}; g(x) = e^{2x} - e^x - x$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n \\ u_{n+1} - u_n &= g(u_n) \end{aligned}$$

On a montré que le minimum de g sur \mathbb{R} était 0 donc g est positive sur \mathbb{R} . De ce fait on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

1. d.

2. Dans cette question on suppose que $a \leq 0$.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.

Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(P_n) : u_n \leq 0$$

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque $u_0 = a \leq 0$.

- **Hérédité**

Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.

– Pour tout entier n on a exprimé u_{n+1} sous forme d'un produit de deux facteurs :

$$u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$$

Or l'exponentielle étant toujours strictement positive, pour tout entier n on a $e^{u_n} > 0$. De fait u_{n+1} est du signe du facteur $(e^{u_n} - 1)$. Puisque par hypothèse de récurrence, $u_n \leq 0$, on a par composition par la fonction exponentielle, strictement croissante sur \mathbb{R} :

$$u_n \leq 0 \iff e^{u_n} \leq 1 \iff (e^{u_n} - 1) \leq 0$$

– On a alors montré que $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1) \leq 0$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**

On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0}$$

2. b. En déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

On a montré que la suite (u_n) était croissante (question 1c.) et majorée par 0 (question 2a.) elle est donc convergente vers un réel ℓ avec $\ell \leq 0$.

2. c. Dans le cas où $a = 0$, donner la limite de la suite (u_n) .

Si $a = u_0 = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}; (u_n) : \begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = e^{2u_n} - e^{u_n} \end{cases}$$

La suite (u_n) est croissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \geq u_0 = 0$$

Mais elle est aussi majorée par 0. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq u_0 = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

La suite (u_n) est donc constante égale à 0 et sa limite est 0.

3. Dans cette question on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier n , $u_n \geq a$.

3. a. Démontrer que, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

D'après la question 1c. on a

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = g(u_n)$$

Pour tout entier naturel n , on a

$$u_n \geq a \geq 0$$

La fonction g est croissante sur \mathbb{R}_+ , par conséquent par composition par g dans l'inégalité précédente :

$$\underbrace{g(u_n)}_{(u_{n+1}-u_n)} \geq g(a) \geq g(0) = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; g(u_n) = u_{n+1} - u_n \geq g(a)}$$

3. b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

Notons pour tout entier naturel n le postulat

$$(P'_n) : u_n \geq a + n \times g(a)$$

• **Initialisation**

Pour $n = 0$, le postulat (P'_0) est vrai puisque : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a > 0 \\ a + 0 \times g(a) = a \end{array} \right. \implies u_0 \geq a + 0 \times g(a)$

• **Hérédité**

Supposons que pour n entier fixé, (P'_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.

– Pour tout entier n on a d'après la question 3a. :

$$u_{n+1} - u_n \geq g(a) \iff u_{n+1} \geq u_n + g(a)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $u_n \geq (a + n \times g(a))$ soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \geq u_n + g(a) \\ u_n \geq (a + n \times g(a)) \end{array} \right. \implies u_{n+1} \geq (a + n \times g(a)) + g(a)$$

Et de ce fait :

$$u_{n+1} \geq a + (n + 1) \times g(a)$$

– On a alors montré que (P'_{n+1}) est vrai.

• **Conclusion**

On a montré que (P'_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P'_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P'_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier n .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + n \times g(a)}$$

3. c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

On a montré (question 3b.) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + n \times g(a)$$

Donc par *théorème de limite et comparaison* :

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a + n \times g(a) = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + n \times g(a) \end{array} \right. \Bigg| \text{par th. de limite et comparaison} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$



4. Dans cette question on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

4. a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

On rappelle que la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc l'algorithme devient :

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leq M$ u prend la valeur $e^u \times (e^u - 1)$ ou $e^{2 \times u} - e^u$ n prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

4. b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Si $M = 60$, on obtient les valeurs suivantes donc l'algorithme affiche $n = 36$.

n	u_n
0	0,02
1	0,020609434
2	0,021256884
3	0,021946001
4	0,022680919
5	0,023466335
6	0,024307605
7	0,025210871
8	0,026183203
9	0,027232782
10	0,028369129
11	0,029603386
12	0,03094868
13	0,032420576
14	0,034037673
15	0,035822376
16	0,037801915
17	0,04000971
18	0,042487224

n	u_n
19	0,045286523
20	0,048473861
21	0,052134838
22	0,056381941
23	0,061365898
24	0,067293256
25	0,074454529
26	0,083271083
27	0,094376951
28	0,108769765
29	0,128108934
30	0,155357372
31	0,196324638
32	0,263977012
33	0,393361623
34	0,714234053
35	2,129681227
36	62,35266837
37	$1,44158 \times 10^{54}$



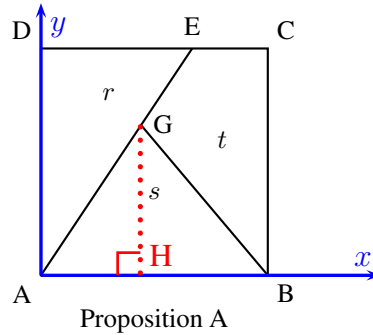
Exercice 4. Obligatoire : Fonctions

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Partie A : étude de la proposition A



Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \frac{1}{3}$. Déterminer les coordonnées des points E et G.

• **Coordonnées de E**

L'aire du triangle ADE rectangle en D est donnée par :

$$r = \mathcal{A}_{ADE} = \frac{AD \times DE}{2} = \frac{1}{3}$$

Or dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a $AD = 1$.

Par conséquent :

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times DE}{2} \iff \frac{1}{3} = \frac{DE}{2} \iff DE = \frac{2}{3}$$

Ainsi les coordonnées de E sont

$$E \left(\frac{2}{3}; 1 \right)$$

• **Coordonnées de G**

On appelle H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle AGB. Son aire est

$$s = \mathcal{A}_{AGB} = \frac{AB \times GH}{2} = \frac{1}{3}$$

Or dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a $AB = 1$.

Par conséquent :

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times GH}{2} \iff \frac{1}{3} = \frac{GH}{2} \iff GH = \frac{2}{3}$$

Ce qui nous donne l'ordonnée du point G :

$$y_G = GH = \frac{2}{3}$$

Or dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, les points A et E sont de coordonnées : $\begin{cases} E \left(\frac{2}{3}; 1 \right) \\ A(0; 0) \end{cases}$

Donc la droite (AE) a pour équation

$$(AE) : y = \frac{3}{2}x$$

Le point G appartenant à la droite (AE), l'abscisse x_G du point G vérifie donc l'équation

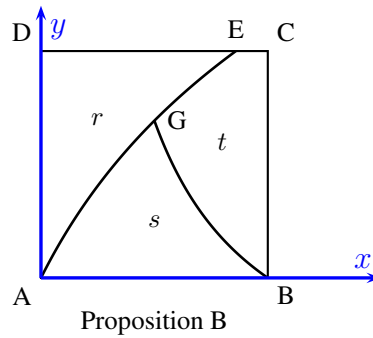
$$(AE) : y_G = \frac{3}{2}x_G \iff \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times x_G \iff x_G = \frac{4}{9}$$

Par conséquent le point G a pour coordonnées

$$G \left(\frac{4}{9}; \frac{2}{3} \right)$$



Partie B : étude de la proposition B



Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geq 0$ par : $f(x) = \ln(2x + 1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k \left(\frac{1-x}{x} \right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. 1. a. Déterminer l'abscisse du point E.

Le point E, d'ordonnée $y_E = 1$ dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, appartient à la portion de la représentation graphique de la fonction f donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$y_E = f(x_E) \iff 1 = \ln(2x_E + 1)$$

Or en composant par la fonction exponentielle, définie sur \mathbb{R} on obtient :

$$1 = \ln(2x_E + 1) \iff e^1 = 2x_E + 1 \iff x_E = \frac{e^1 - 1}{2}$$

Par conséquent le point E a pour coordonnées :

$$E \left(\frac{e^1 - 1}{2} ; 1 \right)$$

1. b. Déterminer la valeur du réel k , sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.

- Le point G, d'abscisse $x_G = 0,5$ dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, appartient à la portion de la représentation graphique de la fonction g donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$y_G = g(x_G) \iff y_G = k \left(\frac{1 - 0,5}{0,5} \right) = k$$

Par conséquent le point G a pour coordonnées :

$$G(0,5 ; k)$$

- Le point G, de coordonnées $G(0,5 ; k)$ dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, appartient aussi à la portion de la représentation graphique de la fonction f donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$y_G = f(x_G) \iff k = \ln(2 \times 0,5 + 1) \iff k = \ln 2$$

- Pour conclure :

$$k = \ln 2 \text{ et } G(0,5 ; \ln 2)$$



2. 2. a. Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$F(x) = (x + 0,5) \times \ln(2x + 1) - x.$$

La fonction F est dérivable comme produit, somme et composée de fonctions qui le sont sur \mathbb{R}_+ .

La fonction F est de la forme $u(x)v(x) - x$ donc de dérivée $u'v + uv' - 1$ avec :

$$\forall x \in [0; +\infty[; F(x) = u(x) \times v(x) - x : \begin{cases} u(x) = (x + 0,5) & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(2x + 1) & ; & v'(x) = \frac{2}{2x + 1} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; +\infty[, F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) - 1 \\ F'(x) &= 1 \times \ln(2x + 1) + (x + 0,5) \times \frac{2}{2x + 1} - 1 \\ F'(x) &= \ln(2x + 1) + \underbrace{\frac{2x + 1}{2x + 1}}_{=1} - 1 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0; +\infty[; F'(x) = \ln(2x + 1) = f(x)}$$

La fonction f admet bien pour primitive la fonction F sur \mathbb{R}_+ .

2. b. Démontrer que $r = \frac{e}{2} - 1$.

$$r \text{ est l'aire du domaine délimité par : } \begin{cases} \text{La courbe de la fonction} & : f \\ \text{La droite d'équation} & : x \mapsto 1 \\ \text{La droite d'équation} & : x = 0 \\ \text{La droite d'équation} & : x = x_E = \frac{e^1 - 1}{2} \end{cases}$$

On a en outre sur l'intervalle $\left[0; \frac{e^1 - 1}{2}\right]$, $f(x) \leq 1$

$$\forall x \in \left[0; \frac{e^1 - 1}{2}\right]; 1 - f(x) \geq 0$$

L'aire r s'exprime donc comme l'intégrale sur $\left[0; \frac{e^1 - 1}{2}\right]$ de $(1 - f(x))$, exprimée en unité d'aire.

$$\begin{aligned} r &= \int_0^{\frac{e^1 - 1}{2}} (1 - f(x)) \, dx \\ r &= \left[x - F(x) \right]_0^{\frac{e^1 - 1}{2}} \\ r &= \frac{e^1 - 1}{2} - F\left(\frac{e^1 - 1}{2}\right) + F(0) \end{aligned}$$

Or on a montré lors de la question 2a. que $F(x) = (x + 0,5) \times \ln(2x + 1) - x$

$$\begin{aligned} r &= \frac{e^1 - 1}{2} - \left(\frac{e^1 - 1}{2} + 0,5\right) \times \ln\left(2 \times \frac{e^1 - 1}{2} + 1\right) + \frac{e^1 - 1}{2} - \underbrace{\left((0 + 0,5) \times \ln(2 \times 0 + 1) - 0\right)}_0 \\ r &= e^1 - 1 - \left(\frac{e^1}{2}\right) \times \underbrace{\ln(e^1)}_1 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{r = \frac{e}{2} - 1}$$

3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0 : +\infty[$.Pour tout réel $x > 0$:

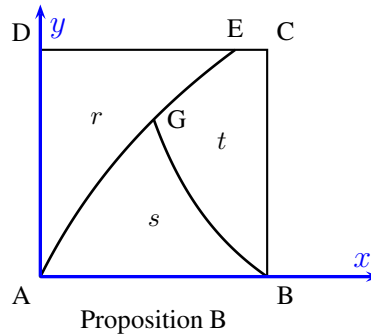
$$g(x) = k \left(\frac{1-x}{x} \right), \text{ où } k = \ln 2 \text{ (question 1b.)}$$

La fonction g est définie et continue sur $]0 : +\infty[$ donc elle y admet des primitives.

$$\forall x \in]0 : +\infty[; g(x) = \ln(2) \times \left(\frac{1-x}{x} \right) = \ln(2) \times \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$$

Or sur $]0 : +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$ est par exemple (à une constante près) $x \mapsto \ln x - x$.Une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0 : +\infty[$ est donc :

$$\boxed{G(x) = \ln(2) \times (\ln x - x)}$$

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}$.**La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?**

On remarque tout d'abord que le carré ABCD étant de côté 1, son aire de de 1 u.a. et donc

$$r + s + t = 1 \implies t = 1 - r - s$$

Vérifions les conditions imposées :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{e}{2} - 1 \approx 0,359 \in [0,3; 0,4] \\ s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0,327 \in [0,3; 0,4] \end{array} \right\} \implies t = 1 - r - s \approx 0,314 \in [0,3; 0,4]$$

La proposition B vérifie donc les conditions imposées par le fabricant qui voulait que les aires soient comprises entre 0,3 et 0,4.



Exercice 4. Spécialité : Arithmétique

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet (px, py, pz) est aussi un TP.
Soit (x, y, z) est un TP, alors par définition :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

En multipliant cette égalité par p^2 où p est un entier naturel non nul on a :

$$p^2 \times (x^2 + y^2) = p^2 \times z^2 \implies \begin{cases} (px)^2 + (py)^2 = (pz)^2 \\ p \in \mathbb{N}^* \text{ donc } (px), (py) \text{ et } (pz) \text{ sont des entiers naturels non nuls.} \end{cases}$$

De ce fait, le triplet (px, py, pz) est aussi un TP.

2. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

- Soit n un nombre impair alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$ et donc

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 \times \underbrace{(2n^2 + 1)}_{k'} + 1$$

Le carré n^2 est donc de la forme $2k' + 1$, il est aussi impair. On vient donc de prouver la propriété suivante :

Propriété 2 (Carré d'un nombre impair)

Si un nombre entier est impair, son carré est aussi impair soit :

$$n \equiv 1 [2] \implies n^2 \equiv 1 [2]$$

- Soit (x, y, z) est un TP avec x, y et z tous les trois impairs.
 - D'après la propriété 2, les carrés x^2, y^2 et z^2 sont aussi impairs.
 - De ce fait la somme $x^2 + y^2$ est paire. En effet on a :

Propriété 3 (Compatibilité avec les opérations)

Soit m un entier $m \geq 2$ et a, b, a', b' des entiers.

- * (1) : Si $a \equiv b [m]$ et $a' \equiv b' [m]$, alors $a + a' \equiv b + b' [m]$
- * (2) : Si $a \equiv b [m]$ et $a' \equiv b' [m]$, alors $a \times a' \equiv b \times b' [m]$
- * (3) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $a \equiv b [m]$, alors $a^n \equiv b^n [m]$

Donc

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 [2] \\ y^2 \equiv 1 [2] \end{cases} \implies x^2 + y^2 \equiv 0 [2]$$

- Cela implique donc que le carré $z^2 = x^2 + y^2$ est pair ce qui contredit l'assertion précédente.

- **Conclusion** : On vient de prouver que :

Si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.



3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.

3. a. Donner la décomposition de l'entier 192.

On obtient la décomposition de 192 par divisions successives. On obtient $\alpha = 6$ et $k = 3$:

$$192 = 2^6 \times 3$$

3. b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$. Écrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2 .

- On a :

$$x = 2^\alpha \times k \implies 2x^2 = 2 \times 2^{2\alpha} \times k^2$$

On sait d'après la propriété 2 que le carré du nombre impair k est aussi un nombre impair donc k^2 est impair est la décomposition cherchée est :

$$x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$$

- On a :

$$z = 2^\beta \times m \implies z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

On sait d'après la propriété 2 que le carré du nombre impair m est aussi un nombre impair donc m^2 est impair est la décomposition cherchée est :

$$z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

3. c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2x^2 = z^2$.

On a d'après ce qui précède :

$$2x^2 = z^2 \iff 2^{2\alpha+1} \times k^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

Par identification de l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2 on a donc :

$$2\alpha + 1 = 2\beta \iff 2(\beta - \alpha) = 1$$

Cette égalité est impossible car le membre de gauche est pair et celui de droite impair.

Il n'existe donc pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2x^2 = z^2$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.

- La décomposition de 2015 est :

$$2015 = 5 \times 13 \times 31$$

- On en déduit que :

$$2015^2 = 5^2 \times \underbrace{(13 \times 31)^2}_{p^2}$$

- Or on sait que $(3 ; 4 ; 5)$ est un TP donc en appliquant le résultat de la question A1. avec $p = (13 \times 31) = 403$ on a :

$$(3 ; 4 ; 5) \text{ TP} \implies (3p ; 4p ; 5p) \text{ est aussi un TP}$$

Et donc

$$(3 \times 403)^2 + (4 \times 403)^2 = (5 \times 403)^2 = 2015^2$$

Soit

$$1209^2 + 1612^2 = 2015^2$$

- Conclusion** : On a donc trouvé un TP de la forme cherchée :

$$(x ; y ; 2015) = (1209 ; 1612 ; 2015)$$



2. On admet que, pour tout entier naturel n , $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.
Déterminer un TP de la forme (2 015 ; y ; z).

On a par division euclidienne :

$$2015 = 2 \times 1007 + 1$$

Ainsi par identification avec l'égalité proposée, en prenant $n = 1007$ on obtient :

$$(2 \times 1007 + 1)^2 + (2 \times 1007^2 + 2 \times 1007)^2 = (2 \times 1007^2 + 2 \times 1007 + 1)^2$$

Soit :

$$2015^2 + 2030112^2 = 2030113^2$$

Soit le TP

$$(2015 ; 2030112 ; 2030113)$$

3. 3. a. En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que :
 $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

On a

$$z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$$

Par conséquent, on cherche les valeurs de x et z telles que :

$$(z - x)(z + x) = 169 \times 961$$

On cherche alors à résoudre le système :

$$\begin{cases} z - x = 169 & : (E_1) \\ z + x = 961 & : (E_2) \end{cases} \iff \begin{cases} z - x = 169 & : (E_1) \\ 2z = 1130 & : (E_2) + (E_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - 169 & = 396 \\ z = \frac{1130}{2} & = 565 \end{cases}$$

Ainsi le couple (396 ; 565) convient.

3. b. En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.

On a :

$$2015 = 5 \times 403$$

D'après la question B3a., puisque $(x = 396 ; z = 565)$ vérifie l'égalité $z^2 = x^2 + 403^2$ on a :

$$565^2 = 396^2 + 403^2$$

Le triplet (396 ; 403 ; 565) est un TP. Donc d'après la question A1. avec $p = 5$, le triplet

$$(396 \times 5 ; 403 \times 5 ; 565 \times 5)$$

est également un TP. Soit le TP cherché

$$(1980 ; 2015 ; 2825)$$

- Fin du devoir -