Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015
Corrigé

EXERCICE 1 **6 POINTS**

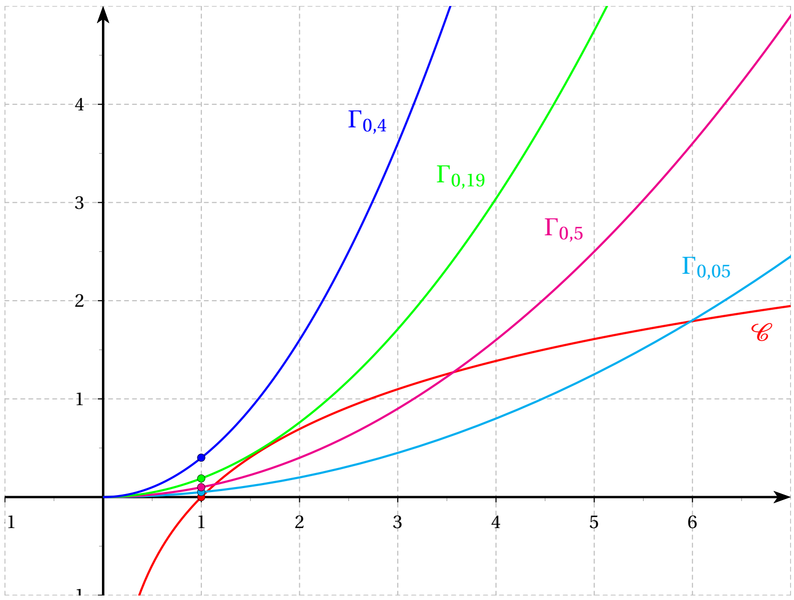
Commun à tous les candidats

Partie A

1. On peut calculer par exemple les ordonnées des points d'abscisse 1 de ces différentes courbes :

$$f(1) = \ln 1 = 0 < g_{0,05}(1) = 0,05 < g_{0,1}(1) = 0,1 < g_{0,19}(1) = 0,19 < g_{0,4}(1) = 0,4$$

On peut alors identifier chaque courbe sur le graphique :



2. Au vu du graphique précédent, on peut conjecturer, en posant $\alpha \simeq 0,19$, que :

— si $0 < a < \alpha$, alors la courbe Γ_a et la courbe $\mathscr{C}$ ont deux points d'intersection ;

— si $a = \alpha$, alors la courbe Γ_a et la courbe $\mathscr{C}$ ont un seul point d'intersection ;

— si $a > \alpha$, alors la courbe Γ_a et la courbe $\mathscr{C}$ n'ont aucun point d'intersection.

Partie B

1. Soit x un réel strictement positif, et M un point d'abscisse x, alors :

$$M \in \mathscr{C} \cap \Gamma_a \iff f(x) = g_a(x) \iff f(x) - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0.$$

2. a. Pour tout réel $x > 0$, on a $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$. Comme $x > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est le même que celui de $1 - 2ax^2$, or, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$1 - 2ax^2 \geqslant 0 \iff \frac{1}{2a} \geqslant x^2 \iff \frac{1}{\sqrt{2a}} \geqslant x.$$

Le signe de $h'_a(x)$ figurant dans le tableau de variation est donc justifié.

b. D'après le théorème de croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, on peut écrire : $h_a(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - ax\right)$. On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - ax\right) = -\infty$ (car $a > 0$), et évidemment $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, d'où, par produit des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty$.

3. Dans cette question $a = 0{,}1$.

a. Sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$ la fonction $h_{0,1}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$ sur $\left]-\infty\,;\,\frac{-1-\ln(0{,}2)}{2}\right]$. Or $\frac{-1-\ln(0{,}2)}{2} \simeq 0{,}3$, donc $0 \in \left]-\infty\,;\,\frac{-1-\ln(0{,}2)}{2}\right]$, et l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet donc une solution unique dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$.

b. En tenant compte des questions B1 et B3a, on peut affirmer alors que $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$ possèdent deux points d'intersection.

4. Dans cette question $a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

a. Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ est atteint en $x = \dfrac{1}{2 \times \frac{1}{2\mathrm{e}}} = \sqrt{\mathrm{e}}$. Donc $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}(\sqrt{e}) = \dfrac{-1-\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{2} = \dfrac{-1+\ln\mathrm{e}}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$.

b. Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ vaut 0, l'équation $h_{\frac{1}{\mathrm{e}}}(x) = 0$ possède donc une unique solution. Les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ possèdent donc un seul point d'intersection.

5. $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation $h_a(x) = 0$ ne possède aucune solution, c'est-à-dire (cf. tableau de variation) lorsque le maximum de la fonction h_a est strictement négatif. Or :

$$\frac{-1-\ln(2a)}{2} < 0 \iff -1 < \ln(2a) \iff \mathrm{e}^{-1} < 2a \iff \frac{1}{2\mathrm{e}} < a.$$

Ainsi, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection si et seulement si $a > \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a :

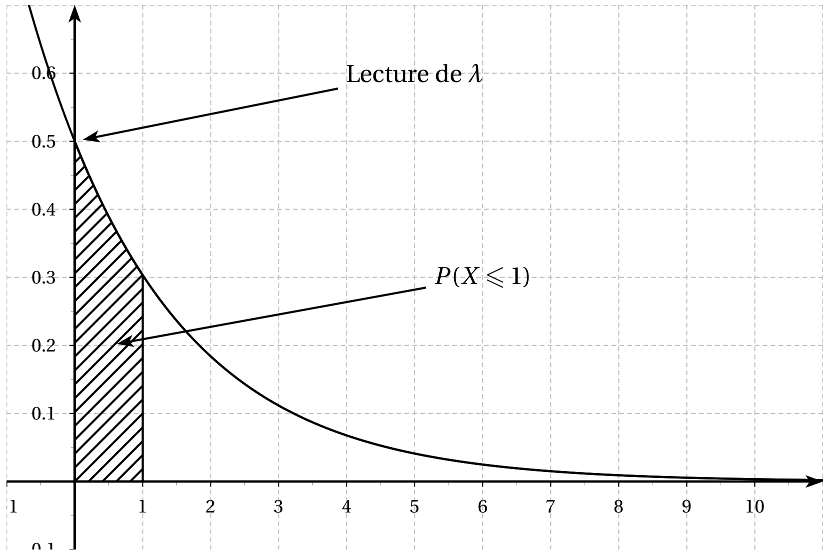
$$\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. Comme $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty}(-\lambda x) = -\infty$ et, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^X = 0$, donc, par composition $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = 0$. Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ (toujours par composition), donc, par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \to +\infty}\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}(0 - 0 + 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Partie B

1. **a.** Graphiquement $P(X \leqslant 1)$ correspond à l'aire hachurée ci-dessous :



b. En $t = 0$, la valeur de $\lambda e^{-\lambda t}$ est égale à λ, on peut donc lire λ comme étant l'ordonnée du point d'abscisse 0 sur la courbe de la fonction densité.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. On peut dire qu'en moyenne, la durée de vie d'un tel composant électronique est de 2 ans.

b. D'après la partie A (ou le cours) :

$$E(X) = 2 \iff \frac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0{,}5.$$

c. D'après le cours, $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0{,}5\times 2} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$. Ce nombre représente la probabilité que le durée de vie du composant soit inférieure à deux ans.

d. On sait que la loi exponentielle est « sans mémoire », donc :

$$\begin{array}{rcl} P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 3) & = & P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 2+1) \\ & = & P(X \geqslant 2) \\ & = & P\left(\overline{X \leqslant 2}\right) \\ & = & 1 - P(X \leqslant 2) \\ & = & 1 - \left(1 - e^{-1}\right) \\ & = & e^{-1} \end{array}$$

Partie C

1. La probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an est donnée par $p(D_1 \cap D_2)$. Les deux événements étant indépendants, on a :

$$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p(D_2) = 0{,}39 \times 0{,}30 = 0{,}1521.$$

2. La probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an est cette fois donnée par $p(D_1 \cup D_2)$, donc :

$$p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0{,}39 + 0{,}39 - 0{,}1521 = 0{,}6279.$$

EXERCICE 3 — 4 POINTS

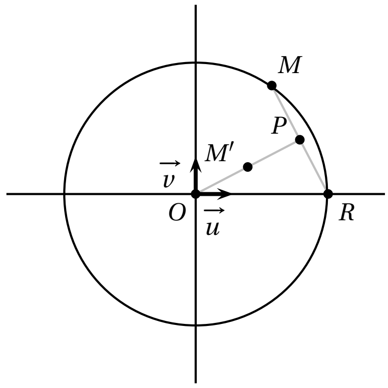
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Notons z_R l'affixe du point R. On a $OM = |z|$ et $OR = OM$. Le point R étant par ailleurs situé sur le demi-axe $[O ; \overrightarrow{u})$, un argument z_R est 0, donc (via par exemple la forme exponentielle) $z_R = |z|$.

2. Soit P le milieu du segment $[MR]$, alors $z_P = \dfrac{z+z_R}{2} = \dfrac{z+|z|}{2}$.

Soit Q le milieu du segment $[OP]$, alors $z_Q = \dfrac{0+z_P}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+|z|}{2}\right)$. Le point Q est donc confondu avec le point M', ce qui justifie la construction :



Partie B

1. Lorsque $z_0 \in]-\infty\,;\,0[$, $|z_0| = -z_0$, donc $z_1 = \dfrac{z_0 - z_0}{4} = 0$ et $|z_1| = 0$. Montrons alors par récurrence que, pout tout entier naturel n non nul, $z_n = 0$.

— **Initialisation.** On a vu que $z_1 = 0$, la propriété est donc vraie au rang 1.

— **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel n non nul, $z_n = 0$.

Alors $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4} = \dfrac{0+|0|}{4} = 0$. La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Pour tout entier naturel n non nul $z_n = 0$.

On en déduit alors que, pour tout entier naturel n non nul, $|z_n| = 0$ et donc que la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

2. Lorsque $z_0 \in [0\,;\,+\infty[$, $|z_0| = z_0$, donc $z_1 = \dfrac{z_0+z_0}{2} = \dfrac{1}{2}z_0$. Montrons alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n \in [0\,;\,+\infty[$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}z_n$.

— **Initialisation.** On a déjà que $z_0 \in [0\,;\,+\infty[$ et $z_1 = \dfrac{1}{2}z_0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

— **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel n, $z_n \in [0\,;\,+\infty[$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}z_n$.

Alors il est clair que $z_{n+1} \in [0\,;\,+\infty[$ donc que $|z_{n+1}| = z_{n+1}$. Par conséquent :

$$z_{n+2} = \frac{z_{n+1} + |z_{n+1}|}{4} = \frac{z_{n+1} + z_{n+1}}{4} = \frac{2z_{n+1}}{4} = \frac{1}{2}z_{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Pour tout entier naturel n, $z_n \in [0\,;\,+\infty[$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}z_n$.

La suite (z_n) est donc géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme z_0, donc, pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n z_0$. On en déduit que $|z_n| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |z_0|$ et donc que $(|z_n|)$ converge vers 0 (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$).

3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

a. On peut conjecturer (en s'aidant de la construction graphique de la partie A par exemple) que la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

b. On rappelle l'inégalité triangulaire, pour tous complexes z et z' :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{|z_n| + |z_n|}{4} = \frac{1}{2}|z_n|. \qquad (1)$$

Montrons maintenant par récurrence que, pour tout entier naturel n : $|z_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

— **Initialisation :** On a $|z_0| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |z_0|$ car $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.

— **Hérédité :** Supposons que, pour un certain entier naturel n, on a

$$|z_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

Alors, en utilisant (1) :

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|z_n| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|$$

et la propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $|z_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

On a, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant |z_n| \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |z_0|$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, le théorème de« des gendarmes » permet alors de conclure que la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Tableau d'état des variables :

Commentaire	p	k	u
Saisie de p	2		
	2		5
1er tour de boucle	2	1	1
2e tour de boucle	2	2	$-0,5$

La valeur affichée en sortie est donc $-0,5$.

Partie B

1. Voici l'algorithme modifié :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Afficher u
	Fin de pour

2. La suite (u_n) n'est pas décroissante puisque $u_4 > u_3$.

3. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} > u_n$.
   — **Initialisation.** On a vu précédemment que $u_4 > u_3$, la propriété est donc vraie pour $n = 3$.
   — **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 3$, on a $u_{n+1} > u_n$, alors $0,5u_{n+1} > 0,5u_n$. Par ailleurs $n+1 > n$ donc $0,5(n+1) > 0,5n$, par somme on a alors $0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) > 0,5n + 0,5$, puis, en ajoutant $-1,5$ membre à membre : $0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5 - 1,5$, c'est-à-dire $u_{n+2} > u_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.
   — **Conclusion.** Pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_{n+1} > u_n$.

   En d'autres termes la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.

4. Soit n un entier naturel quelconque, alors :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 \\ & = & 0,1\,(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n - 0,1 + 0,5 \\ & = & 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 \\ & = & 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\ & = & 0,5\,(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\ & = & 0,5v_n. \end{array}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.
Comme $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = 0,5^n$.

5. D'après les deux questions qui précèdent, on peut écrire que, pour tout entier naturel n :

$$0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5.$$

En multipliant par 10 membre à membre on a alors $10 \times 0,5^n = u_n - n + 5$ d'où l'on déduit aisément que $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. $-1 < 0,5 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-5) = +\infty$, donc, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

*Les **parties A** et **B** peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

1. Tableau d'état des variables :

Commentaire	a	b	c
Entrées	26		
	26	9	
Traitement	26	9	8
1er tour de boucle	9	9	8
	9	8	8
	9	8	1
2e tour de boucle	8	8	1
	8	1	1
	8	1	0
Fin de la boucle ($c = 0$) et affichage	8	$\boxed{1}$	0

2. L'algorithme modifié est le suivant :

```
Variables :    c est un entier naturel
               a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :      Demander a
               Demander b
Traitement :   Affecter à c le nombre r(a, b)
               Tant que c ≠ 0 :
                    Affecter à a le nombre b
                    Affecter à b la valeur de c
                    Affecter à c le nombre r(a, b)
               Fin Tant que
               Si b = 1 :
                    Afficher « les nombres sont premiers entre eux »
               Sinon :
                    Afficher « les nombres ne sont pas premiers entre eux »
               Fin du Si
```

Partie B

1. **a.** La lettre V correspond à $x = 21$. $9 \times 21 + 2 = 191$, et $191 \equiv 9$ [26], donc $x' = 9$, ce qui correspond bien à la lettre J.

   b. On rappelle le théorème de Bézout : a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
   Ici 9 et 26 sont premiers entre eux, le théorème s'applique donc.
   Le couple $(u, v) = (3, -1)$ convient puisque $9 \times 3 + 26 \times (-1) = 1$.

   c. Supposons que $x' \equiv 9x + 2$ [26], alors, en multipliant par 3 membre à membre : $3x' \equiv 3 \times 9x + 6$ [26], or d'après la question précédente $9 \times 3 \equiv 1$ [26], donc $3x' \equiv x + 6$ [26] d'où $x \equiv 3x' - 6$ [26] et comme $-6 \equiv 20$ [26], on a bien $x \equiv 3x' + 20$ [26].
   Réciproquement, supposons que $x \equiv 3x' + 20$ [26], alors, en multipliant par 9 membre à membre : $9x \equiv 9 \times 3x' + 180$ [26]. Or $9 \times 3 \equiv 1$ [26] et $180 \equiv -2$ [26], donc $9x \equiv x' - 2$ [26], d'où $x' \equiv 9x + 2$ [26].
   L'équivalence est alors démontrée.

   d. La lettre R correspond à $x' = 17$, alors $3x' + 20 = 71$, or $71 \equiv 19$ [26], donc $x = 19$, ce qui correspond à la lettre T.

2. On a ici $x = 9$, $x' = 3$ et $q = 2$, donc $3 = 9p + 2$ [26] ce qui équivaut à $9p \equiv 1$ [26]. En multipliant par 3 membre à membre : $3 \times 9p = 3$ [26], or on a vu que $3 \times 9 \equiv 1$ [26], donc on obtient que $p \equiv 3$ [26], d'où, comme $0 \leqslant p \leqslant 25$, l'unique valeur $p = 3$.

3. B correspond à $x = 1$. $13x + 2 = 15$ donc B est codé par la lettre P
   D correspond à $x = 3$. $13x + 2 = 41$ et $41 \equiv 15$ [26], donc D est également codé par la lettre P
   Ce codage ne peut convenir car une lettre P dans le message crypté peut correspondre à B ou D, d'où ambigüité dans le décryptage.