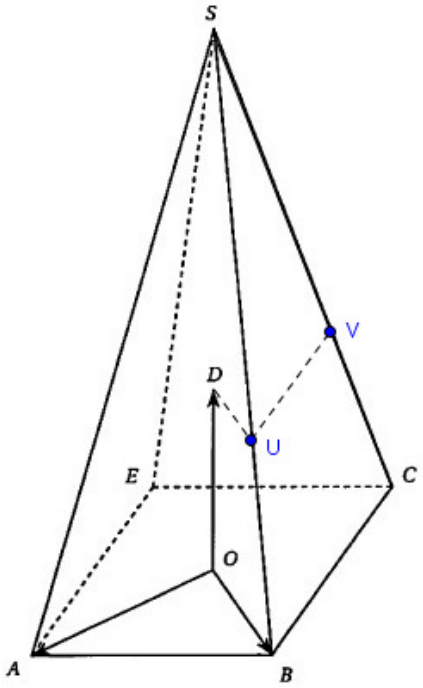
Amérique du Nord

Exercice 1

Partie A

1) Comme *U* est un point de la droite (SB) qui a pour côte 1, il a la même côte que *D*. On trace la parallèle à (OB) passant par *D* ; elle coupe (SB) en *U*.

2) Soit (Δ) la droite parallèle à (AE) passant par *U*. (Δ) est alors incluse dans le plan (AEU). De plus, (Δ) et (SC) sont coplanaires (elles sont incluses dans le plan (SBC)) et ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes en *V*.



3) • Cherchons les coordonnées du point *U* : dans le triangle SOB, les droites (OD) et (BU) sont sécantes en S, et les droites (OB) et (DU) sont parallèles ; d'après le théorème de Thalès, on obtient : $\frac{SD}{SO}=\frac{SU}{SB}=\frac{DU}{OB}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}=\frac{SU}{SB}=\frac{DU}{1}$. Par suite, $DU=\frac{2}{3}$.
Comme *U* appartient à (ODS), alors $x_U=0$. On en déduit que *U* a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$.

• Montrons que $\overrightarrow{KU}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{KU}\bullet\overrightarrow{AE}=\left(0-\frac{5}{6}\right)\times(0-1)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\times(-1-0)+(1-0)\times(0-0)=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}=0$$

On en déduit que $\overrightarrow{KU}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.

• Montrons que *K*, *A* et *E* sont alignés : $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{6}-1\,;\,-\frac{1}{6}-0\,;\,0-0\right)$, c'est-à-dire $\left(-\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{6}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1\,;\,-1\,;\,0)$. Par suite, $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.

Donc *K*, *A* et *E* sont alignés.

Par conséquent, ***K* est donc bien le pied de la hauteur issue de *U* dans le trapèze *AUVE***.

Partie B

1) $3x_A - 3y_A + 5z_A - 3 = 3\times 1 - 3\times 0 + 5\times 0 - 3 = 0$

$3x_E - 3y_E + 5z_E - 3 = 3\times 0 - 3\times(-1) + 5\times 0 - 3 = 0$

$3x_U - 3y_U + 5z_U - 3 = 3\times 0 - 3\times\dfrac{2}{3} + 5\times 1 - 3 = 0$

Comme *A*, *E* et *U* vérifient l'équation de ce plan, et que ces trois points ne sont pas alignés, alors **le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$**.

2) Le vecteur $\vec{n}(3\ ;\ -3\ ;\ 5)$ est un vecteur normal au plan (EAU).

Donc **la droite (d) a pour représentation paramétrique** $\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$.

3)

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (EAU) \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 5z - 3 = 0 \\ x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t + 9t + 15 + 25t - 3 = 0 \\ x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 43t + 12 = 0 \\ x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{12}{43} \\ x = 3\times\left(-\dfrac{12}{43}\right) = -\dfrac{36}{43} \\ y = -3\times\left(-\dfrac{12}{43}\right) = \dfrac{36}{43} \\ z = 3 + 5\times\left(-\dfrac{12}{43}\right) = \dfrac{69}{43} \end{cases}$$

Donc ***H* a pour coordonnées** $\left(-\dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{69}{43}\right)$.

4) • Volume de *SEAUV* : le solide *SEAUV* est une pyramide de base le trapèze *AUVE* et de hauteur *SH* d'après la question précédente.

Par suite, $\mathcal{V}_{SEAUV} = \dfrac{1}{3} \times aire\ de\ la\ base \times hauteur = \dfrac{1}{3} \times aire(AUVE) \times SH$

Alors $\mathcal{V}_{SEAUV} = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times SH$.

Or $SH = \sqrt{\left(-\frac{36}{43} - 0\right)^2 + \left(\frac{36}{43} - 0\right)^2 + \left(\frac{69}{43} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{36^2 + 36^2 + 60^2}}{43} = \frac{12\sqrt{43}}{43} = \frac{12}{\sqrt{43}}$.

Donc $\mathcal{V}_{SEAUV} = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times \frac{12}{\sqrt{43}} = \frac{60}{54} = \frac{10}{9}$ u.v..

• Volume de *SABCD* :

ce solide a pour volume $\frac{1}{3} \times aire\ de\ la\ base \times hauteur = \frac{1}{3} \times aire(ABCD) \times SO$. Comme $SO = 3$ et $aire(ABCE) = AB^2 = (1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2 = 2$, alors $\mathcal{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$ u.v..

• Comme $\mathcal{V}_{SABCE} \neq 2 \times \mathcal{V}_{SEAUV}$, alors **le plan (EAU) ne partage donc pas la pyramide SABCE en deux solides de même volume**.

Exercice 2 (enseignement obligatoire)

1) a) **A_0 a pour coordonnées $(-3\,;4)$.**

$\begin{cases} x_1 = 0,8x_0 - 0,6y_0 = -2,4 - 2,4 = -4,8 \\ y_1 = 0,6x_0 + 0,8y_0 = -1,8 + 3,2 = 1,4 \end{cases}$; d'où **A_1 a pour coordonnées $(-4,8\,;1,4)$.**

$\begin{cases} x_2 = 0,8x_1 - 0,6y_1 = -3,84 - 0,84 = -4,68 \\ y_2 = 0,6x_1 + 0,8y_1 = -2,88 + 1,12 = -1,76 \end{cases}$; d'où **A_1 a pour coordonnées $(-4,68\,;-1,76)$.**

b) **Variables :**

i,x,y,t : nombres réels

Initialisation :

x prend la valeur -3

y prend la valeur 4

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

Construire le point de coordonnées $(x\,;\,y)$

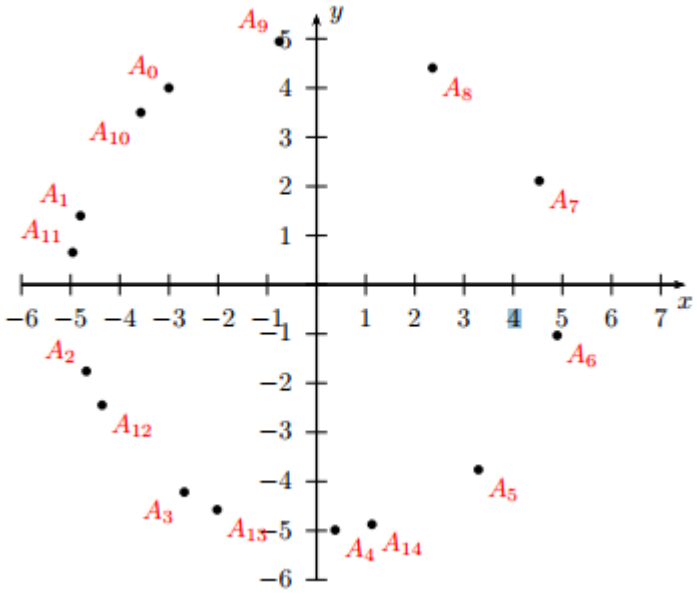
t prend la valeur x

x prend la valeur $0,8t-0,6y$

y prend la valeur $0,6t+0,8y$

Fin Pour

c)



Il semble que, pour tout entier naturel n, les points A_n se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon 5.

2) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $u_n = 5$ »

→ *Initialisation* : Comme $u_0 = |-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Par suite, on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $p \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Alors : $u_p = 5$.

$$u_{p+1} = \sqrt{x_{n+1} + iy_{n+1}} = \sqrt{{x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2} = \sqrt{(0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2}$$
$$= \sqrt{0,64{x_n}^2 - 0,96x_ny_n + 0,36{y_n}^2 + 0,36{x_n}^2 + 0,96x_ny_n + 0,64{y_n}^2} \quad .$$
$$= \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2} = u_p = 5$$

On en déduit que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$ et pour tout p supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n de N, $u_n = 5$** .

On en déduit que $|z_n| = 5$, c'est-à-dire $OA_n = 5$.

Cela prouve que **pour tout entier naturel n, les points A_n se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon 5.**

b) $e^{i\theta} z_n = e^{i\theta}(x_n + iy_n) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n) = (0,8 + 0,6i)(x_n + iy_n)$

$e^{i\theta} z_n = 0,8x_n + 0,8y_n i + 0,6x_n i - 0,6y_n = (0,8x_n - 0,6y_n) + i(0,6x_n + 0,8y_n)$

Par conséquent, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$, **pour tout entier naturel n.**

c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $z_n = e^{in\theta} z_0$ »

→ *Initialisation* : Comme $e^{i\times 0\times\theta}z_0 = e^0 z_0 = z_0$, alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $p \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Alors : $z_p = e^{ip\theta}z_0$.

$z_{p+1} = e^{i\theta}z_p = e^{i\theta}e^{ip\theta}z_0 = e^{i(p+1)\theta}z_0$.

On en déduit que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$ et pour tout p supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout n de N, $z_n = e^{in\theta}z_0$**.

d) $z_0 = -3+4i = 5\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right) = 5(-0{,}6+0{,}8i) = 5i(0{,}8+0{,}6i) = 5e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = 5e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Par conséquent, **$\theta+\frac{\pi}{2}$ est un argument de z_0**.

e) Comme $z_n = e^{in\theta}z_0$, alors $\arg(z_n) = \arg\left(e^{in\theta}\right) + \arg(z_0) = n\theta + \left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = (n+1)\theta+\frac{\pi}{2}$.

θ est l'angle du secteur angulaire créé à partir de deux points consécutifs et de l'origine du repère. En effet, $\left(\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \arg(z_{n+1}-z_n) = (n+2)\theta+\frac{\pi}{2}-(n+1)\theta-\frac{\pi}{2} = \theta+2k\pi$

Le point A_{n+1} est l'image par la rotation de centre O et d'angle θ du point A_n : on trace donc, dans le sens trigonométrique, la demi droite $[Ox[$ telle que l'angle entre cette droite et $[OA_n]$ soit égal à θ. Le point d'intersection de cette demi-droite et du cercle est le point A_{n+1}.

Exercice 2 (enseignement de spécialité)

Partie A

1) à l'aide de la calculatrice, on obtient $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2) $M^2+8M+6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3$.

Donc $M^2+8M+6I = M^3$.

3) $M^2+8M+6I = M^3$ équivaut à $M^3-M^2-8M = 6I$, c'est-à-dire à $M\times\left(M^2-M-8I\right) = 6I$, ou encore à $M\times\frac{1}{6}\left(M^2-M-8I\right) = I$.

Par conséquent, **M est inversible, et $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2-M-8I\right)$**.

Partie B

1) Comme les points A, B et C appartiennent à la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

On obtient alors $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=-1 \\ 4a+2b+c=5 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$.

2) D'après la question précédente, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Or $M^{-1} = \frac{1}{6} \times \left[\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\boldsymbol{a=1}$, $\boldsymbol{b=1}$ et $\boldsymbol{c=-1}$.

Partie C

1) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} -\frac{1}{2}p + \frac{1}{6}q + \frac{1}{3}r = a \\ \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q = b \\ p + \frac{1}{3}q - \frac{1}{3}r = c \end{cases}$

Or $\begin{cases} -\frac{1}{2}p + \frac{1}{6}q + \frac{1}{3}r = a \\ \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q = b \\ p + \frac{1}{3}q - \frac{1}{3}r = c \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -3p + q + 2r = 6a \\ 3p - 3q = 6b \\ 6p + 2q - 2r = 6c \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} \mathbf{-3p + q + 2r \equiv 0 \ [6]} \\ \mathbf{3p - 3q \equiv 0 \ [6]} \\ \mathbf{6p + 2q - 2r \equiv 0 \ [6]} \end{cases}$.

2) On a $3p - 3q \equiv 0 \ [6]$, c'est-à-dire $3(p-q) \equiv 0 \ [6]$. Cela signifie que $3(p-q)$ est divisible par 6 ; par suite, $p-q$ est divisible par 2. On en déduit que $p - q \equiv 0 \ [2]$.

Comme $-3p + q + 2r \equiv 0 \ [6]$ et $6p + 2q - 2r \equiv 0 \ [6]$, alors

$2(-3p + q + 2r) + (6p + 2q - 2r) \equiv 2 \times 0 + 0 \ [6]$, c'est-à-dire $4q + 2r \equiv 0 \ [6]$, ou encore $2(2q + r) \equiv 0 \ [6]$.

Par conséquent, $2q + r \equiv 0 \ [3]$. Comme $2 \equiv -1 \ [3]$, alors $-q + r \equiv 0 \ [3]$.

On en déduit que $\begin{cases} \boldsymbol{p-q\equiv 0} \quad [2] \\ \boldsymbol{q-r\equiv 0} \quad [3] \end{cases}$.

3) a) A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}(-2\,;\,q-p)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;\,r-p)$ sont colinéaires.
Or ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $x_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AC}} = y_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AC}}$, c'est-à-dire $-2(r-p)=(q-p)\times 1$.
Par conséquent, **A, B et C sont alignés si et seulement si $-3p+q+2r=0$**.

b) Si on prend $p=7$, alors $7-q\equiv 0 \quad [2]$. Ainsi $q\equiv 7 \quad [2]$, et par suite, $q\equiv 1 \quad [2]$. Il existe alors un entier k tel que $q=1+2k$.
De plus, $-q+r\equiv 0 \quad [3]$, c'est-à-dire $r\equiv q \quad [3]$; il existe alors un entier k' tel que $r=q+3k'$.
Par suite, on obtient : $r=1+2k+3k'$.
Comme A, B et C ne peuvent pas être alignés (ce ne serait pas des points d'une parabole), on doit avoir $-3p+q+2r\neq 0$.
Or $-3p+q+2r\neq 0$ équivaut à $-21+1+2k+2(1+2k+3k')\neq 0$, c'est-à-dire à $-18+6k+6k'\neq 0$ (ou encore $k+k'\neq 3$.
Prenons $k=4$ et $k'=1$; ainsi $\boldsymbol{q=1+2\times 4=9}$ et $\boldsymbol{r=9+3\times 1=12}$.
Comme $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\times\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{6} \end{pmatrix}$

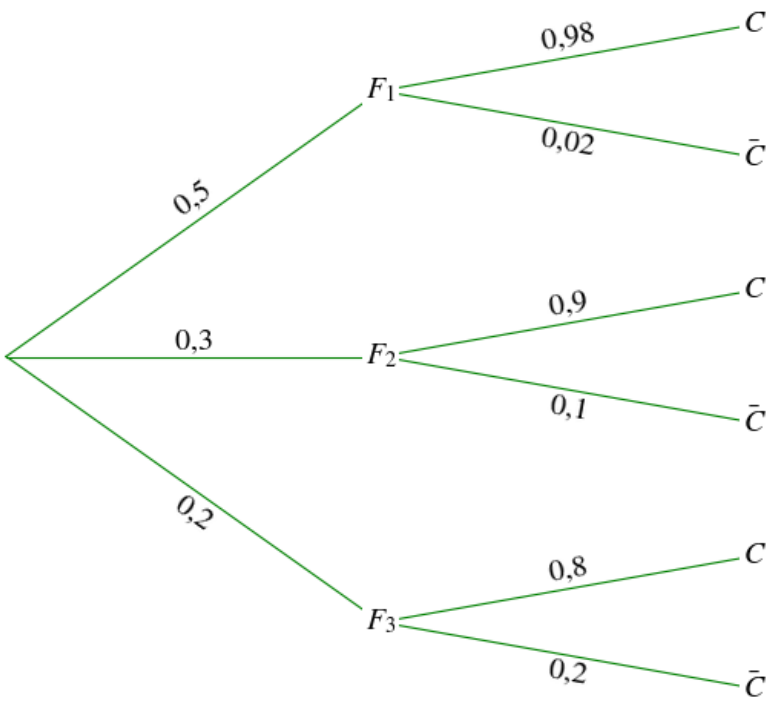
Exercice 3

Partie A

1) On cherche $p(98\leq X\leq 102)$. D'après la calculatrice, $p(98\leq X\leq 102)\approx 0{,}954$.
La probabilité que la tablette soit mise sur le marché est environ égale à 0,954.
2) Comme X suit la loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart-type σ, alors la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-100}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
Or $Z=\dfrac{X-100}{\sigma}$ équivaut à $X=\sigma Z+100$. D'où $p(98\leq X\leq 102)$ équivaut à $p(-2\leq \sigma Z\leq 2)$, c'est-à-dire à $p\left(-\dfrac{2}{\sigma}\leq Z\leq \dfrac{2}{\sigma}\right)=2p\left(Z\leq \dfrac{2}{\sigma}\right)-1$.
$p(98\leq X\leq 102)=0{,}97$ équivaut à $2p\left(Z\leq \dfrac{2}{\sigma}\right)-1=0{,}97$, c'est-à-dire à $p\left(Z\leq \dfrac{2}{\sigma}\right)=0{,}985$.
On en déduit que $\dfrac{2}{\sigma}\approx 2{,}170$. Par conséquent, $\sigma\approx\dfrac{2}{2{,}170}\approx \boldsymbol{0{,}922}$.

Partie B

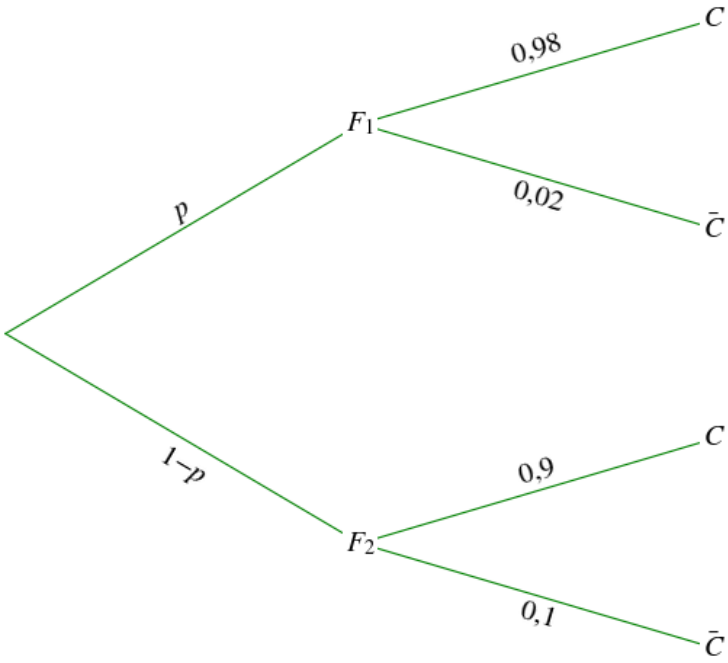
1)



On cherche $p_C(F_1)$. Or $p_C(F_1) = \dfrac{p(F_1 \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,5 \times 0,98}{0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8} \approx 0,53$.

Donc **la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'lle ,est conforme, est environ égale à 0,53**.

2)



$p(C) = p \times 0,98 + (1-p) \times 0,9 = 0,9 + 0,08p$. Or l'entreprise souhaite que $p(C) = \dfrac{92}{100} = 0,92$, alors $0,9 + 0,08p = 0,92$.

Or $0,9+0,08p=0,92$ équivaut à $0,08p=0,02$, c'est-à-dire à $p=\dfrac{0,02}{0,08}=0,25$.

L'entreprise doit donc acheter 25% de fèves au fournisseur 1 afin d'atteindre cet objectif.

Exercice 4

Partie A

1) On a $u=ln+v$ avec $v(x)=x-3$. Comme la fonction ln et la fonction v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, alors u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et $u'=ln'+v'$ avec $v'(x)=1$.

D'où, $u'(x)=\dfrac{1}{x}+1$, pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

Comme x est strictement positif, alors $\dfrac{1}{x}+1>0$. Par conséquent, **la fonction u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$**.

2) La fonction est dérivable donc continue, et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ (par somme de limites)

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}(x-3)=-3$, alors $\lim\limits_{x\to0}u(x)=-\infty$ (par somme de limites)

D'où $0\in]-\infty\,;+\infty[$; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$**.

De plus, $u(2)=\ln2-1<0$ et $u(3)=\ln3+1>0$; donc $2<\alpha<3$.

3) D'après les variations de u et la question précédente, on en déduit que :

- si $x<\alpha$, $u(x)<0$

- si $x=\alpha$, $u(x)=0$

- si $x>\alpha$, $u(x)>0$

Partie B

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\ln x-2)=-\infty$ (par somme de limites)

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ (par somme de limites)

Par conséquent, par produit et somme de limites, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.

2) a) On a $f=w\times r+2$ avec $w(x)=1-\dfrac{1}{x}$ et $r(x)=\ln x-2$.

Les fonctions w et r sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, alors f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et $f'=w'r+r'w+0$ avec $w'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ et $r'(x)=\dfrac{1}{x}$.

D'où, $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\times(\ln x-2)+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\dfrac{u(x)}{x^2}$, pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

b) Comme $x^2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $u(x)$.

On en déduit que **f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\ ;+\infty[$**.

Partie C

1) $f(x) - \ln x = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x = \ln x - 2 - \dfrac{\ln x - 2}{x} + 2 - \ln x$.

Donc, **pour tout réel x strictement positif, $f(x) - \ln x = -\dfrac{\ln x - 2}{x}$**.

Les abscisses des points d'intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont les solutions de l'équation $f(x) = \ln x$. Or $f(x) = \ln x$ équivaut à $-\dfrac{\ln x - 2}{x} = 0$, c'est-à-dire à $\ln x - 2 = 0$, ou encore à $x = e^2$.

De plus, $f(e^2) = \ln(e^2) = 2$.

Par conséquent, **$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' se coupent au point de coordonnées $(e^2\ ;\ 2)$**.

2) $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^{e^2} \left(2 \times \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) dx = \left[2 \times \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{e^2} = \left(2\ln(e^2) - \frac{1}{2}\left(\ln(e^2)\right)^2\right) - \left(2\ln 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)$

Donc $\mathcal{I} = 2 \times 2 - \dfrac{1}{2} \times 4 - 0 = 2$.

Cela signifie que l'aire comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$ est égale à 2 u.a.