Liban

Exercice 1

Partie A

1) Soit un réel x. $e^{-x} \times e^{x} = e^{-x+x} = e^{0} = 1$. Comme $e^{x} > 0$ **pour tout réel *x***, alors $\mathbf{e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}}$.

2) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition, définie pour n entier naturel, par : « pour tout réel x, $\left(e^{x}\right)^{n} = e^{nx}$ »

→ *Initialisation* : pour $n = 0$, $\left(e^{x}\right)^{0} = 1$ et $e^{0} = 1$ alors on a $\mathscr{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : $\left(e^{x}\right)^{n} = e^{nx}$.

$\left(e^{x}\right)^{n+1} = \left(e^{x}\right)^{n} \times e^{x} = e^{nx} \times e^{x} = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$. Par suite, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

→ *Conclusion* : on a alors prouvé :

$\mathscr{P}(0)$ est vraie et pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout réel *x* et pour tout entier naturel *n* :** $\mathbf{\left(e^{x}\right)^{n} = e^{nx}}$.

Partie B

1) a) $u_0 + u_1 = \int_0^1 \dfrac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$ (d'après la propriété de linéarité de l'intégration). Donc $\mathbf{u_0 + u_1} = \int_0^1 1\,dx = (1-0)\times 1 \mathbf{= 1}$.

b) $u_1 = \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \left(-\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$.

Si on pose $u(x) = 1 + e^{-x}$, alors $u'(x) = -e^{-x}$. D'où : $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Comme u est strictement positive sur $[0\ ;\ 1]$, alors une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$.

Donc $\mathbf{u_1} = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1 = -\ln\left(1+e^{-1}\right) + \ln\left(1+e^{0}\right) \mathbf{= \ln(2) - \ln\left(1+e^{-1}\right)}$.

On en déduit que $\mathbf{u_0 = 1 - \ln(2) + \ln\left(1+e^{-1}\right)}$.

2) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$, $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$.

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0\ ;\ 1]$, alors $\int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx > 0$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel *n*,** $\mathbf{u_n \geq 0}$.

3) a) Soit n un entier naturel non nul.

$u_{n+1}+u_n=\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx+\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1\left(\frac{e^{-(n+1)x}+e^{-nx}}{1+e^{-x}}\right)dx$ (d'après la propriété de linéarité de l'intégration).

Alors $u_{n+1}+u_n=\int_0^1\left(\frac{e^{-nx}\left(e^{-x}+1\right)}{1+e^{-x}}\right)dx=\int_0^1 e^{-nx}dx=\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1=-\frac{1}{n}e^{-n}+\frac{1}{n}e^{0}$.

Par conséquent, **pour tout entier naturel n, $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$**.

b) D'après la question précédente, $u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}-u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Or pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\geq 0$, alors $\frac{1-e^{-n}}{n}-u_{n+1}\leq\frac{1-e^{-n}}{n}$.

Donc, **pour tout entier naturel n, $u_n\leq\frac{1-e^{-n}}{n}$**.

4) D'après les questions précédentes, $0\leq u_n\leq\frac{1-e^{-n}}{n}$, pour tout entier naturel n.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-e^{-n}\right)=1$ (par somme de limites).

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$; donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)=0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0}$.

Exercice 2

1) La droite $(\mathscr{D})$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(2\ ;\ -3\ ;\ -1)$ et passe par le point A. Par suite, $(\mathscr{D})$ a une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases}x=x_A+x_{\overrightarrow{AB}}t\\ y=y_A+y_{\overrightarrow{AB}}t\\ z=z_A+z_{\overrightarrow{AB}}t\end{cases}$

Donc **une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ est** : $\begin{cases}\boldsymbol{x=1+2t}\\ \boldsymbol{y=-2-3t}\\ \boldsymbol{z=-1-t}\end{cases}$ **avec** $(\boldsymbol{t}\in\mathbf{R})$.

2) La droite $(\mathscr{D}')$ a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

● Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires $\left(\text{en effet, } \frac{x_{\vec{u}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}\neq\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}\right)$, alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

● Cherchons l'éventuel point d'intersection des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$

$$M(x\ ;y\ ;z)\in(\mathscr{D})\cap(\mathscr{D}')\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}1+2t=2-k\\ -2-3t=1+2k\\ -1-t=k\end{cases}$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\mathscr{D})\cap(\mathscr{D}') \iff \begin{cases} 2t+k=1 & [1] \\ 3t+2k=-1 & [2] \\ t+k=-1 & [3] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2 & [1]-[3] \\ t=1 & [2]-2\times[3] \\ t+k=-1 & \end{cases}$$

Ce qui est impossible ; donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ n'ont pas de point d'intersection.

Par conséquent, $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ **ne sont pas coplanaires**.

3) a) $4x_A+y_A+5z_A+3=4-2-5+3=0$ d'où A appartient à $(\mathscr{P})$.
$4x_B+y_B+5z_B+3=12-5-10+3=0$ d'où B appartient à $(\mathscr{P})$.
Comme $(\mathscr{P})$ contient deux points de la droite $(\mathscr{D})$, alors $(\mathscr{P})$ **contient la droite** $(\mathscr{D})$.

b) $$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\mathscr{P})\cap(\mathscr{D}') \iff \begin{cases} 4x+y+5z+3=0 \\ x=2-k \\ y=1+2k \\ z=k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8-4k+1+2k+5k+3=0 \\ x=2-k \\ y=1+2k \\ z=k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3k+12=0 \\ x=2-k \\ y=1+2k \\ z=k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=-\dfrac{12}{3}=-4 \\ x=2+4=6 \\ y=1-8=-7 \\ z=-4 \end{cases}$$

Donc **la droite** $(\mathscr{D}')$ **et le plan** $(\mathscr{P})$ **sont sécants en un point** C **de coordonnées** $(\mathbf{6\ ;-7\ ;-4})$.

4) a) $\vec{u}\bullet\vec{w}=(-1)\times1+2\times1+1\times(-1)=0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
De plus, le point C appartient aux deux droites. Donc, (Δ) **et** $(\mathscr{D}')$ **sont perpendiculaires**.

b) $\overrightarrow{AB}\bullet\vec{w}=2\times1+(-3)\times1+(-1)\times(-1)=0$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
Par suite, $(\mathscr{D})$ et (Δ) sont perpendiculaires.

Une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = -7+\alpha \\ z = -4-\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbf{R})$

$$M(x\ ;y\ ;z) \in (\mathscr{D}) \cap (\Delta) \iff \begin{cases} 1+2t = 6+\alpha \\ -2-3t = -7+\alpha \\ -1-t = -4-\alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t-\alpha = 5 & [1] \\ 3t+\alpha = 5 & [2] \\ t-\alpha = 3 & [3] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2 & [1]-[3] \\ \alpha = 5-3\times 2 = -1 \\ 2-(-1) = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 6-1 = 5 \\ y = -7-1 = -8 \\ z = -4-(-1) = -3 \end{cases}$$

Par conséquent, (Δ) **coupe** $(\mathscr{D})$ **perpendiculairement en un point *E* de coordonnées** $(\mathbf{5\ ;-8\ ;-3})$.

Exercice 3 (enseignement obligatoire)

1) Un tirage d'une boule blanche de l'urne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

Cette épreuve est répétée dix fois de manière indépendante puisque l'on fait dix tirages successifs et après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues. X suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

D'où, pour tout entier k compris entre 0 et 10, $p(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{10-k}$.

Donc la probabilité de tirer exactement trois boules blanches est égale à $p(X=3)$, c'est-à-dire à $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7$. **La proposition 1 est donc fausse**.

2) $p(X>a) = 1-p(X\le a)$, alors $p(X>a) = p(X\le a)$ équivaut à $1-p(X\le a) = p(X\le a)$, c'est-à-dire à $p(X\le a) = \frac{1}{2}$.

Or $p(X\le a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^0 = 1-e^{-\lambda a}$.

D'o ù : $p(X>a) = p(X\le a) \iff 1-e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \iff e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \iff -\lambda a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

Donc le réel a tel que $p(X>a) = p(X\le a)$ est égal à $\frac{\ln(2)}{\lambda}$.

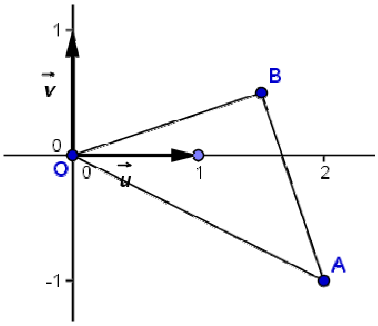
Par suite, **la proposition 2 est vraie**.

3) $z=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$. Alors, pour tout entier naturel n, $z^n=2^n\mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{3}}$.

Si n est un multiple de 3, il existe un entier k tel que $n=3k$. Ainsi, $z^{3k}=2^n\mathrm{e}^{-ik\pi}$ ou encore $z^{3k}=2^{3k}\left(\cos(-k\pi)+i\sin(-k\pi)\right)=8^k\cos(k\pi)$ car $\sin(-k\pi)=0$ pour tout entier k.

Par suite, z^{3k} est un réel. **La proposition 3 est donc vraie**.

4) Si le triangle OAB est rectangle, ce ne peut être qu'au point B.



$$\frac{0-b}{a-b}=\frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)a}{a-\left(\frac{1+i}{2}\right)a}=\frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)}{1-\left(\frac{1+i}{2}\right)}=\frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)}{\frac{2}{2}-\left(\frac{1+i}{2}\right)}$$

Alors $\frac{0-b}{a-b}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{(-1-i)(1+i)}{1^2+1^2}=\frac{-1-i-i+1}{2}=-i$

On en déduit que :

$\frac{BO}{BA}=\frac{|0-b|}{|a-b|}=\left|\frac{0-b}{a-b}\right|=|-i|=1$, alors OAB est isocèle en B.

$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right)=\arg\left(\frac{0-b}{a-b}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$, alors OAB est rectangle en B.

La proposition 4 est donc vraie.

5) $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)=\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg\left(\frac{\frac{-10}{\overline{z}}}{z}\right)=\arg\left(\frac{-10}{z\overline{z}}\right)=\arg\left(\frac{-10}{|z|^2}\right)=\pi$ car $\frac{-10}{|z|^2}$ est un réel négatif.

Donc, pour tout point M d'affixe non nulle, les points O, M et M' sont alignés.
La proposition 5 est donc fausse.

Exercice 4

Partie A

1) On a $u=v+w$ avec $v(x)=x^2-2$ et $w(x)=\ln(x)$.

La fonction u est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. Alors : $u'=v'+w'$ avec $v'(x)=2x$ et $w'(x)=\frac{1}{x}$.

D'où : $u'(x)=2x+\frac{1}{x}$. Comme $x>0$, alors $u'(x)>0$.

Par conséquent, **la fonction u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$**.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-2\right)=-2\\ \lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \boldsymbol{\lim\limits_{x\to0}u(x)=-\infty}\text{ (par somme de limites).}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}$$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty}$ (par somme de limites).

2)a) Comme la fonction u est continue (car dérivable), strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que 0 appartient à $u(]0\ ;\ +\infty[)=\mathbf{R}$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\ ;+\infty[$**.

b) À l'aide de la calculatrice, on obtient l'encadrement suivant : $\mathbf{1{,}31<\alpha<1{,}32}$.

3) Comme la fonction u est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que $u(\alpha)=0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4) On sait que α est l'unique solution de l'équation $u(x)=0$. Ainsi $\alpha^2-2+\ln(\alpha)=0$.
Par suite, $\mathbf{\ln(\alpha)=2-\alpha^2}$.

Partie B

1) On remarque que $f=m+n^2$ avec $m(x)=x^2$ et $n(x)=2-\ln(x)$.
Les fonctions m et n sont dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

D'où $f'=m'+2nn'$ avec $m'(x)=2x$ et $n'(x)=-\dfrac{1}{x}$.

Donc, **pour tout x de $]0\ ;+\infty[$**, $\boldsymbol{f'(x)}=2x+2\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\ln(x)\right)=\dfrac{2x^2-4+2\ln(x)}{x}\ \boldsymbol{=\dfrac{2u(x)}{x}}$.

2) Comme $x>0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $u(x)$. D'après la question 3) de la partie A, on en déduit les variations de f : **f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\ ;+\infty[$**.

Partie C

1) $\boldsymbol{AM}=\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=\sqrt{(x-0)^2+\left(\ln(x)-2\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(2-\ln(x)\right)^2}\ \boldsymbol{=\sqrt{f(x)}}$.

2) a) On remarque que $g=h\circ f$ où h est la fonction racine carrée.
La fonction h est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc d'après le théorème sur les variations d'une fonction composée, **les variations de g sont les mêmes que celles de f sur l'ensemble de définition de f, c'est-à-dire sur $]0\ ;+\infty[$**.

Remarque : On aurait pu également dire que $g'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$, et comme $\sqrt{f}>0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors le signe de g' est le même que celui de f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b) D'après les résultats précédents et ceux de la partie B, on peut dire que AM est minimale lorsque $x=\alpha$, c'est-à-dire que **AM est minimale en un point P de coordonnées $(\alpha\ ;\ \ln(\alpha))$**.

c) $AP=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+(2-\ln(\alpha))^2}=\sqrt{\alpha^2+(2-(2-\alpha^2))^2}$ d'après la question 4) de la partie A. D'où $AP=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}=\sqrt{\alpha^2}\times\sqrt{1+\alpha^2}$.

Or $\alpha>0$, alors $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$; par conséquent, $\boldsymbol{AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$.

3) La droite (AP) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{\ln(\alpha)-2}{\alpha-0}=\dfrac{2-\alpha^2-2}{\alpha}=-\alpha$.

La tangente à Γ en P a pour coefficient directeur le nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en α, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\alpha}$.

Or $(-\alpha)\times\dfrac{1}{\alpha}=-1$, donc **la droite (AP) est perpendiculaire à la tangente à Γ en P**.

<u>Exercice 4 (enseignement de spécialité)</u>

1) Comme B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors

$z_B=e^{i\frac{\pi}{2}}z_A=i(2-i)=1+2i$.

Comme $\mathcal{I}$ est le milieu du segment $[AB]$, alors $z_{\mathcal{I}}=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{2-i+1+2i}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

Soit s la similitude directe de centre A ; son écriture complexe est de la forme $z'-z_A=a(z-z_A)$, c'est-à-dire $z'-(2-i)=a(z-(2-i))$ où a est un nombre complexe.

De plus, s transforme $\mathcal{I}$ en O, alors $0-(2-i)=a\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i-(2-i)\right)$.

Or $0-(2-i)=a\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i-(2-i)\right)$ équivaut à $a=\dfrac{-2+i}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}=\dfrac{-4+2i}{-1+3i}=\dfrac{(-4+2i)(-1-3i)}{(-1)^2+3^2}=1+i$.

Par conséquent, l'écriture complexe de s est :
$z'=(1+i)z-(1+i)(2-i)+2-i=(1+i)z-(2-i+2i+1)+2-i=(1+i)z-1-2i$.

La proposition 1 est donc vraie.

2) Soit (E) l'équation $3x-5y=2$.

Comme $3\times(-1)-5\times(-1)=2$, alors le couple $(-1\ ;\ -1)$ est une solution particulière de (E).

D'où on a : $\begin{cases}3x-5y=2\\3\times(-1)-5\times(-1)=2\end{cases}$.

En soustrayant membre à membre ces deux équations, on obtient :
$3x-5y=3\times(-1)-5\times(-1)$, ou encore $3(x+1)=5(y+1)$ (E').

Alors on en déduit que 5 divise $3(x+1)$; comme 5 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x+1$.
Il existe donc un entier k tel que $x+1=5k$, c'est-à-dire $x=5k-1$.
En remplaçant x par $5k-1$ dans l'équation (E'), on obtient : $y+1=3k$, c'est-à-dire $y=3k-1$.

Réciproquement, vérifions que les couples $(5k-1,\ 3k-1)$, avec k un entier relatif, sont solutions de l'équation (E). $3(5k-1)-5(3k-1)=15k-3-15k+5=2$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) sont les couples $(5k-1,\ 3k-1)$, avec k un entier relatif. **La proposition 2 est donc vraie**.

3) Tableau des « congruences modulo 3 » :

x	0	1	2
x^2	0	1	1

On en déduit les congruences de x^2+y^2 modulo 3 :

x^2 \ y^2	0	1
0	0	1
1	1	2

Donc $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod 3$ équivaut à $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ et $y^2 \equiv 0 \pmod 3$, c'est-à-dire à $x \equiv 0 \pmod 3$ et $y \equiv 0 \pmod 3$. **La proposition 3 est donc fausse**.

4) Pour tout entier naturel k tel que $2 \le k \le n$, k divise $n!$. Il existe alors un entier m tel que $n! = mk$; par suite, $n!+k = mk+k = k(m+1)$.
$n!+k$ est divisible par un nombre supérieur ou égal à 2 et n'est donc pas premier.
La proposition 4 est donc vraie.

5) Soit (E') l'équation $x^2-52x+480=0$.
Cette équation admet deux solutions dans $\mathbf{N}$: 12 et 40.
Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $\mathrm{PGCD}(a\ ;b)=12$ et $\mathrm{PPCM}(a\ ;b)=40$.
Alors $ab=12\times 40$ et il existe deux entiers premiers entre eux a' et b' tels que $a=12a'$ et $b=12b'$.
On en déduit que $12a'\times 12b' = 12\times 40$, c'est-à-dire $12a'b'=40$; ce qui est impossible car 12 ne divise pas 40. **La proposition 5 est donc fausse**.