

1. Exercice 1

1)  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$  car les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

D'où :  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)$ . Or  $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ .

$p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A}) + p(B) - (1 - p(\bar{A})) \times p(B) = 1 - p(\bar{A}) + p(\bar{A}) \times p(B)$ .

Donc  $p(B) = \frac{p(A \cup B) - 1 + p(\bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{\frac{4}{5} - 1 + \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$ . **La réponse correcte est donc la : b.**

2)  $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 0,04e^{-0,04x} dx = 1 - [-e^{-0,04x}]_0^5 = e^{-0,2} \approx 0,82$ .

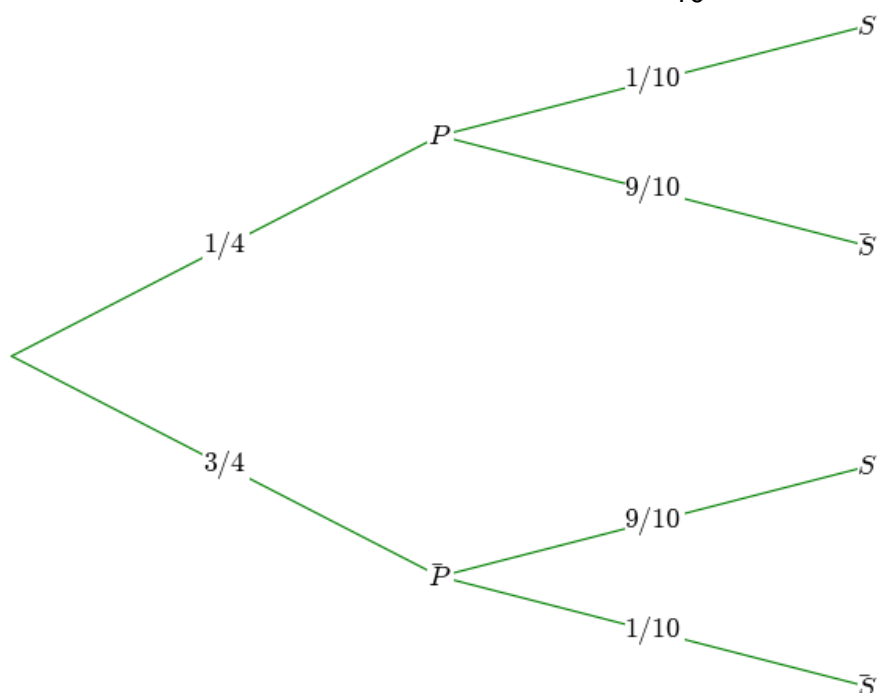
**La réponse correcte est donc la : d.**

3) Soit les événements suivants :  $P$  : « il pleut » et  $S$  : « je sors mon chien ».

Dans ma rue, il pleut une fois sur 4 ; alors  $p(S) = \frac{1}{4}$ .

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{1}{10}$  ; alors  $p_P(S) = \frac{1}{10}$ .

S'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{9}{10}$  ; alors  $p_{\bar{P}}(S) = \frac{9}{10}$ .



On est amené à rechercher  $p_S(\bar{P})$ . Or  $p_S(\bar{P}) = \frac{p(\bar{P} \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{9}{10}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{9}{10}} = \frac{\frac{27}{40}}{\frac{28}{40}} = \frac{27}{28}$ .

**La réponse correcte est donc la : d.**

## 2. Exercice 2

### Partie A

1) a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . D'où, par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$ .

Or  $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ . Donc, par limite d'une fonction composée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x\right) = +\infty$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b)  $f(x) = \frac{1}{3}x + h(x)$  avec  $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$ . Or, d'après la question précédente,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ . Donc la droite (D) d'équation  $y = \frac{1}{3}x$  est asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $+\infty$ .

c) Étudions le signe de  $f(x) - \frac{1}{3}x$ , c'est-à-dire de  $h(x)$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$ , et par suite,  $1 + e^{-x} > 1$ . Comme la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ , alors  $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ . Donc,  $h(x) > 0$  pour tout réel  $x$ .

Par conséquent, (C) est au-dessus de (D) sur  $\mathbf{R}$ .

d) Soit un réel  $x$ .

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \ln(1 + e^{-x}) = \frac{1}{3}x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{3}x + \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = \frac{1}{3}x + \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \frac{1}{3}x + \ln(e^x + 1) - x$$

Par conséquent,  $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$ , pour tout réel  $x$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . D'où, par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$ .

Or  $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ . Donc, par limite d'une fonction composée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{3}x\right) = +\infty$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

2) a) On a  $f = u + \ln(v)$  avec  $u(x) = \frac{1}{3}x$  et  $v(x) = 1 + e^{-x}$ .

Comme la fonction  $v$  est dérivable et strictement positive sur  $\mathbf{R}$ , alors la fonction  $\ln(v)$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ . La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbf{R}$ .

Alors :  $f' = u' + \frac{v'}{v}$  avec  $u'(x) = \frac{1}{3}$  et  $v'(x) = -e^{-x}$ .

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x} - 3e^{-x}}{3(1 + e^{-x})} = \frac{1 - 2e^{-x}}{3(1 + e^{-x})} = \frac{(1 - 2e^{-x}) \times e^x}{3(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}.$$

Par conséquent, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$ .

b) Pour tout réel  $x$ ,  $3(e^x + 1) > 0$  ; alors le signe de  $f'(x)$  dépend de celui de  $(e^x - 2)$ . Or :

•  $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$  ;

•  $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2)$  ;

•  $e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln(2)$ .

On en déduit que **la fonction  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; \ln(2)[$  et croissante sur  $[\ln(2) ; +\infty[$ .**

### Partie B

1) D'après la partie A, la courbe (C) est au-dessus de (D) sur  $\mathbf{R}$ , donc sur  $[0 ; n]$ , alors

$$d_n = \int_0^n \left[ f(x) - \frac{1}{3}x \right] dx = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx, \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

2) On admet que, pour tout réel  $x$ ,  $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ .

Comme les fonctions  $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues sur  $\mathbf{R}$ , donc sur  $[0 ; n]$ , alors

d'après le respect de l'ordre par l'intégration,  $\int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq \int_0^n e^{-x} dx$ .

Or  $\int_0^n e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^n = (-e^{-n}) - (-e^0) = 1 - e^{-n}$ . Donc :  $d_n \leq 1 - e^{-n}$ .

De plus,  $(1 - e^{-n}) - 1 = -e^{-n}$ . Comme  $-e^{-n} < 0$  pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$(1 - e^{-n}) - 1 \leq 0$ , c'est-à-dire  $1 - e^{-n} \leq 1$ .

Par conséquent, **pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $d_n \leq 1$ .**

3) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx - \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx + \int_n^0 \ln(1 + e^{-x}) dx.$$

Alors,  $d_{n+1} - d_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx$ .

Comme la fonction  $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$  est strictement positive sur  $\mathbf{R}$  (d'après la question 1) c) de

la partie A) et que  $n < n+1$ , alors  $\int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx > 0$ .

Par conséquent, la suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

Comme la suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  est également majorée par 1 (d'après la question précédente), on en déduit que **la suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  est convergente.**

### Partie C

1) Le coefficient directeur de (T) est le nombre dérivé de  $f$  en 0.

Or  $f'(0) = \frac{e^0 - 2}{3(e^0 + 1)} = \frac{-1}{6}$  ; donc **le coefficient directeur de (T) est égal à  $-\frac{1}{6}$ .**

2) Soit  $a$  un réel non nul.

Soit  $M$  et  $N$  les points de (C) d'abscisses respectives  $-a$  et  $a$ .



$$\text{D'où : } \begin{cases} x_J - x_F = x_{\overline{EF}} \\ y_J - y_F = y_{\overline{EF}}, \text{ c'est-à-dire} \\ z_J - z_F = z_{\overline{EF}} \end{cases} \begin{cases} x_J = 1+1 \\ y_J = 0+0 \\ z_J = 0+1 \end{cases} \text{ D'où } \mathbf{J} \text{ a pour coordonnées } (2 ; 0 ; 1).$$

$$\text{b) } \overline{DJ} \cdot \overline{BG} = (2-0) \times (1-1) + (0-1) \times (1-0) + (1-0) \times (1-0) = 0 - 1 + 1 = 0.$$

$$\overline{DJ} \cdot \overline{BI} = (2-0) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) + (0-1) \times (0-0) + (1-0) \times (1-0) = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Donc le vecteur  $\overline{DJ}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires  $\overline{BG}$  et  $\overline{BI}$  du plan  $(BGI)$ . Par conséquent,  $\overline{DJ}$  est un vecteur normal au plan  $(BGI)$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } M(x ; y ; z) \in (BGI) &\Leftrightarrow \overline{BM} \cdot \overline{DJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \times 2 + (y-0) \times (-1) + (z-0) \times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y + z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $(BGI)$  a pour équation cartésienne  $2x - y + z - 2 = 0$ .

d) La distance du point  $F$  au plan  $(BGI)$  est égale à  $\frac{|2x_F - y_F + z_F - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}}$ .

$$\text{Or } \frac{|2x_F - y_F + z_F - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Donc la distance du point  $F$  au plan  $(BGI)$  est égale à  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

2) a) Comme  $(\Delta)$  est la droite orthogonale au plan  $(BGI)$ , alors elle a pour vecteur directeur  $\overline{DJ}$ . Donc une représentation paramétrique de  $(\Delta)$  est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ avec } (t \in \mathbf{R})$$

b) Soit  $K$  le centre de la face  $ADHE$ . Alors  $K$  est le milieu de  $[AH]$ , et par suite,  $K$  a pour coordonnées  $\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ .

$$\begin{cases} 1 + 2t = x_K \\ -t = y_K \\ 1 + t = z_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 0 \\ -t = \frac{1}{2} \\ 1 + t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que  $K$  est un point de  $(\Delta)$ .

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad M(x; y; z) \in (BGI) \cap (\Delta) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 4t + t + 1 + t - 2 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 6t + 1 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{6} \\ x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc la droite  $(\Delta)$  et le plan  $(BGI)$  sont sécants en un point  $L$  de coordonnées

$$\left( \frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6} \right).$$

d) Soit  $M(x; y; z)$  l'orthocentre du triangle  $BGI$ . Alors :

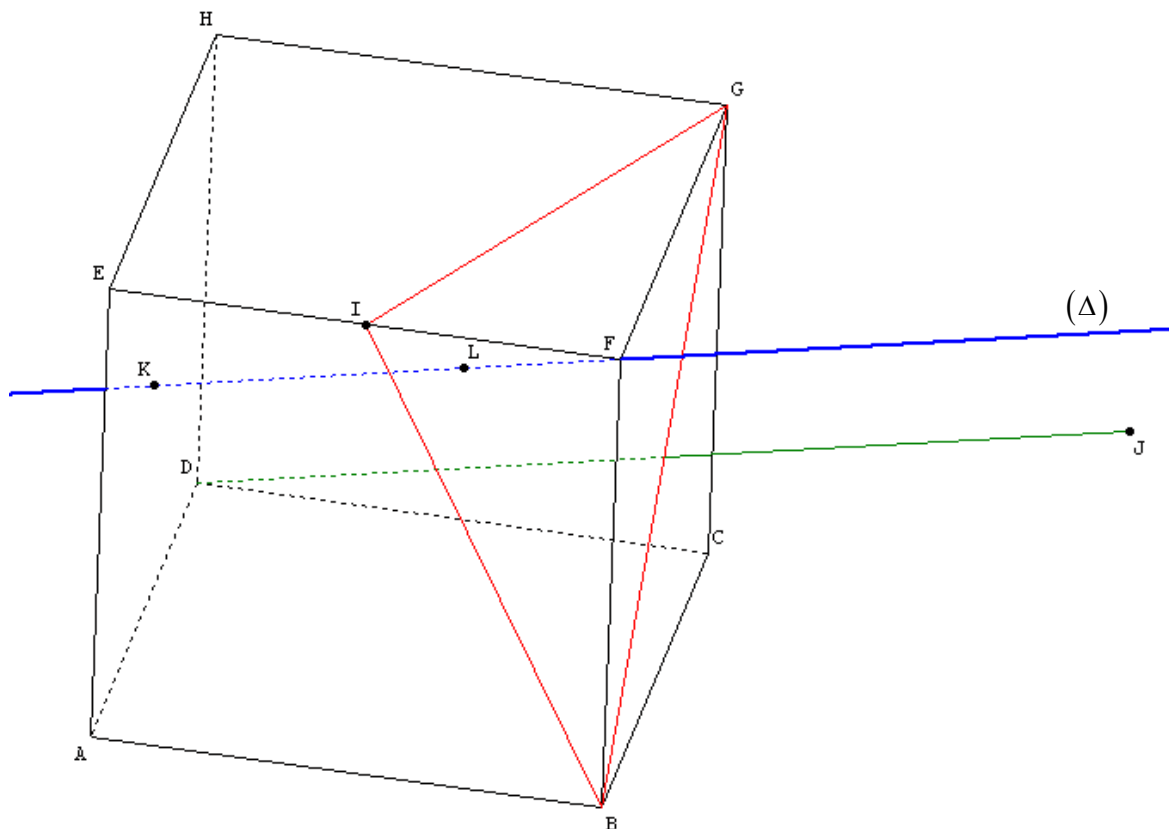
$$\begin{aligned}
\begin{cases} \overline{IM} \cdot \overline{BG} = 0 \\ \overline{BM} \cdot \overline{IG} = 0 \\ \overline{GM} \cdot \overline{IB} = 0 \\ M \in (BGI) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right) \times 0 + y \times 1 + (z - 1) \times 1 = 0 \\ (x - 1) \times \frac{1}{2} + y \times 1 + z \times 0 = 0 \\ (x - 1) \times \frac{1}{2} + (y - 1) \times 0 + (z - 1) \times (-1) = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x - z + \frac{1}{2} = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - z \\ \frac{1}{2}x - z + \frac{1}{2} = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overline{IM} \cdot \overline{BG} = 0 \\ \overline{BM} \cdot \overline{IG} = 0 \\ \overline{GM} \cdot \overline{IB} = 0 \\ M \in (BGI) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - z \\ x = 2z - 1 \\ 2z - 2 - 1 + z + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - z \\ x = 2z - 1 \\ 4z - 2 - 1 + z + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6} \\ x = \frac{2}{3} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Par conséquent, l'orthocentre du triangle  $BGI$  est le point  $L$ .



#### 4. Exercice 4 (enseignement obligatoire)

##### Partie A

$$1) |z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}. \text{ Alors } z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right] = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Comme  $z_B = \overline{z_A}$ , alors  $z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ .

2) Voir ci-dessous.

$$3) AB = |z_B - z_A| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3} ; AC = |z_C - z_A| = \left| -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ et}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}. \text{ Donc } \mathbf{ABC} \text{ est un triangle équilatéral.}$$

### Partie B

$$1) a) z_{A'} = \frac{1}{3} i z_A^2 = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} \right)^2 = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} ;$$

$$z_{B'} = \frac{1}{3} i z_B^2 = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \left( \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}} \right)^2 = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{C'} = \frac{1}{3} i z_C^2 = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \times 9 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

b) Voir ci-dessous.

$$c) z_{\overline{OB'}} = z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_{\overline{OA}} = z_A = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3} z_{\overline{OB'}}. \text{ D'où : } \overline{OA} = \sqrt{3} \overline{OB'}.$$

Par suite, **les points O, A et B' sont alignés.**

$$\overline{OB} \text{ a pour coordonnées } \left( -\frac{3}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ et } \overline{OA'} \text{ a pour coordonnées } \left( \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right).$$

D'où :  $\overline{OB} = -\sqrt{3} \overline{OA'}$ . Par suite, **les points O, A' et B sont alignés.**

2) a) Comme G est l'isobarycentre des points O, A, B et C, alors pour tout point M du plan,  $\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 4 \overline{MG}$ .

Prenons  $M = O$  ; on obtient :  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 4 \overline{OG}$ .

$$\text{Par suite, } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3}{4} = \frac{-6}{4}.$$

Donc **G a pour affixe**  $-\frac{3}{2}$ .

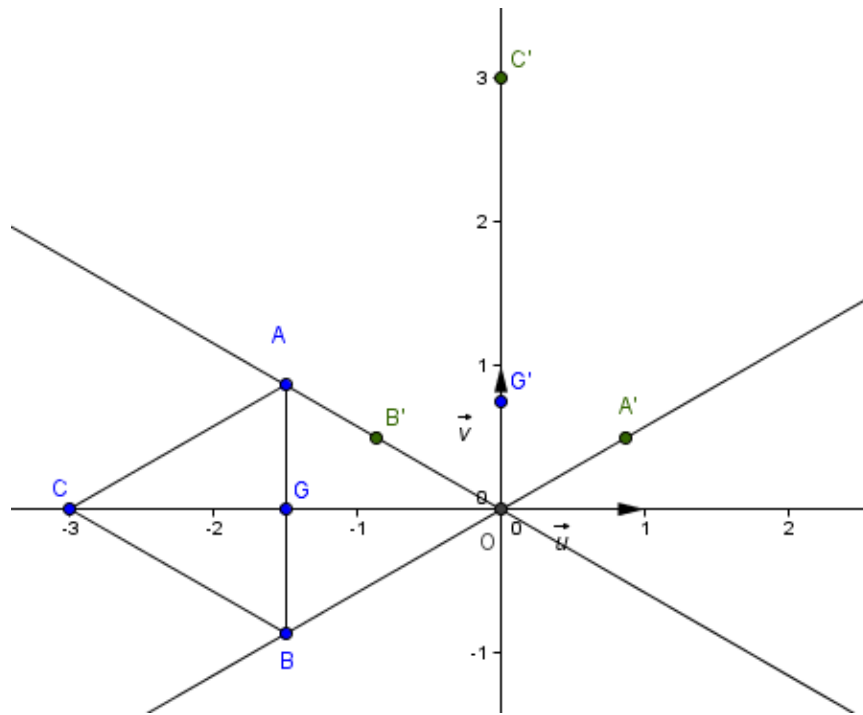
$$\text{Par conséquent, } z_{G'} = \frac{1}{3} i z_G^2 = \frac{1}{3} i \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4} i$$

b) Soit H l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

$$\text{Alors } z_H = \frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 3i}{4} = i. \text{ Comme H et G' sont}$$

distinct, alors **G' n'est pas l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.**





3) Si  $M$  appartient à  $(AB)$ , alors  $z_M = -\frac{3}{2} + it$  où  $t$  est un réel.

Alors  $z_{M'} = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2} + it\right)^2 = \frac{1}{3}i\left(\frac{9}{4} - 3it - t^2\right) = t + i\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2\right)$ , c'est-à-dire  $\begin{cases} x_{M'} = t \\ y_{M'} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2 \end{cases}$ .

Par conséquent, si  $M$  appartient à  $(AB)$ , alors  $M'$  appartient à la parabole d'équation

$$y = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2.$$