Amérique du Nord

1. *Exercice 1*

Partie A : étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

1) Comme la fonction y est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ 30]$, alors la fonction z est dérivable sur $[0\ ;\ 30]$, et $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$, c'est-à-dire $y' = -z'y^2$.

$$\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z(0)} = 0{,}01 \\ -z'y^2 = 0{,}05y(10-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = \dfrac{1}{0{,}01} = 100 \\ z' = -0{,}05\dfrac{1}{y}(10-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}05z\left(10 - \dfrac{1}{z}\right) = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$$

Par conséquent, **la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$**.

2) a) Les solutions de l'équation différentielle $z' = -0{,}5z + 0{,}05$ sont les fonctions définies sur $[0\ ;\ 30]$ par $z(x) = Ce^{-0{,}5x} + 0{,}1$ où C est une constante réelle.
Or $z(0) = 100$, alors $C + 0{,}1 = 100$, c'est-à-dire $C = 99{,}9$.
Donc, **pour tout réel x de $[0\ ;30]$, $z(x) = 99{,}9\ e^{-0{,}5x} + 0{,}1$**.

Comme $y = \dfrac{1}{z}$, alors $y(t) = \dfrac{1}{99{,}9e^{-0{,}5t} + 0{,}1} = \dfrac{10}{999\ e^{-0{,}5t} + 1}$, **pour tout réel t de $[0\ ;30]$**.

b) Le pourcentage de la population infectée au bout de 30 jours est égal à $y(30)$.
Or $y(30) = \dfrac{10}{999e^{-15} + 1} \approx 10$.
Par conséquent, **environ 10 % de la population est infectée au bout de 30 jours**.

Partie B : étude sur l'efficacité d'un vaccin

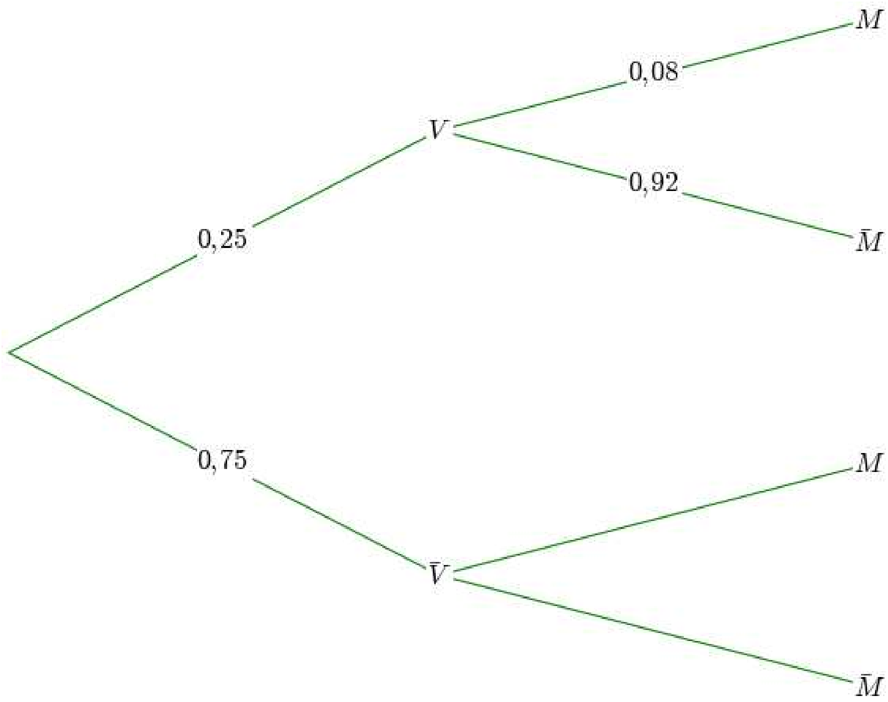
Soient les événements suivants : V : « l'individu est vacciné » et M : « l'individu est malade ».

Comme le quart de la population est vaccinée, alors $p(V) = 0{,}25$.
On en déduit que $p(\overline{V}) = 0{,}75$.

Comme sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades, alors $p_V\left(\overline{M}\right)=0,92$.

De plus, 10 % de la population totale est malade, alors $p(M)=0,1$.

On peut alors modéliser la situation par l'arbre pondéré suivant :



1) Rechercher la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » revient à déterminer $p\left(\overline{V}\cap M\right)$.

Comme V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(M)=p(V\cap M)+p\left(\overline{V}\cap M\right)=p(V)\times p_V(M)+p\left(\overline{V}\cap M\right)$$

D'où : $p\left(\overline{V}\cap M\right)=p(M)-p(V)\times p_V(M)=0,1-0,25\times 0,08=0,08$.

Donc **la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08**.

2) La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est égale à $p_{\overline{V}}(M)$.

Or $p_{\overline{V}}(M)=\dfrac{p\left(\overline{V}\cap M\right)}{p\left(\overline{V}\right)}=\dfrac{0,08}{0,75}=\dfrac{8}{75}$.

La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est égale à $\dfrac{8}{75}$.

2. Exercice 2

Partie A : restitution organisée de connaissances

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a<b$.

$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_a^b(g-f)(x)dx$.

Comme $g(x) \geq f(x)$ pour tout x de $[a\ ;\ b]$, alors $(g-f)(x) \geq 0$.

On en déduit que $\int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0$, et par suite, $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Par conséquent, **si f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.**

Partie B

1) a) Comme x appartient à $[0\ ;\ 1]$ et que la fonction $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$, alors $-0^2 \geq -x^2 \geq -1^2$, c'est-à-dire $-1 \leq -x^2 \leq 0$.

Or la fonction exponentielle est croissante sur **R** donc sur $[-1\ ;\ 0]$; on en déduit que $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0$, ou encore que $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

Par conséquent, **pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.**

b) Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{e}$, f et $x \mapsto 1$ sont continues sur $[0\ ;\ 1]$, d'après la partie A,

$$\int_0^1 \frac{1}{e}dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 1\,dx.$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{e}dx = \frac{1}{e}(1-0) = \frac{1}{e}$ et $\int_0^1 1\,dx = 1(1-0) = 1$. Par conséquent, $\mathbf{\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1}$.

2) $u_1 = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx$.

Si on pose $v(x) = -x^2$, alors $v'(x) = -2x$. D'où : $xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}v'(x)e^{v(x)}$.

Or une primitive de la fonction $v'e^v$ est la fonction e^v.

On en déduit que : $\boldsymbol{u_1} = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}e^{-1}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = \mathbf{\frac{e-1}{2e}}$.

3) a) Pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $x^n \geq 0$ et $e^{-x^2} \geq 0$; alors $x^n e^{-x^2} \geq 0$.

D'après la propriété donnée dans les pré-requis de la partie A, on en déduit que $\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx \geq 0$, c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n non nul.

De plus, $u_0 > 0$ d'après la question 1) b) de la partie B ?

Par conséquent, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n \geq 0}$.

b) Soit n un entier naturel non nul.

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x^2}dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left[x^{n+1}e^{-x^2} - x^n e^{-x^2}\right]dx = \int_0^1 (x-1)x^n e^{-x^2}dx$.

Pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $x^n e^{-x^2} \geq 0$ et $x-1 \leq 0$; alors $(x-1)x^n e^{-x^2} \leq 0$. On en déduit que $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x^2}dx \leq 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n non nul.

De plus, $u_1 \approx 0,32$ et $0,36 < u_0 \leq 1$, d'où $u_1 < u_0$. Par suite, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n.
Par conséquent, **la suite (u_n) est décroissante**.

c) D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; **elle est donc convergente vers un réel l**.

4) a) D'après la question 1) a), pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$. Or, pour tout entier naturel n, $0 \leq x^n$, alors $\frac{x^n}{e} \leq x^n f(x) \leq x^n$.
Comme $x^n f(x) \leq x^n$ pour tout réel x de $[0 ; 1]$, d'après la propriété de la partie A, on obtient :

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

Or $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$; on en déduit que : $\boldsymbol{u_n \leq \frac{1}{n+1}}$ **pour tout entier naturel *n***.

b) D'après la question précédente et la question 3) a), on, peut écrire que :

pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

3. Exercice 3

1) Dans le repère $\left(A \; ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les points A, B, C, D, E, F, G et H ont respectivement pour coordonnées $(0 ; 0 ; 0)$, $(1 ; 0 ; 0)$, $(1 ; 1 ; 0)$, $(0 ; 1 ; 0)$, $(0 ; 0 ; 1)$, $(1 ; 0 ; 1)$, $(1 ; 1 ; 1)$ et $(0 ; 1 ; 1)$.
Comme I est le centre de la face $ADHE$, alors I est le milieu de $[AH]$.
D'où ***I* a pour coordonnées $\boldsymbol{\left(0 \; ; \frac{1}{2} \; ; \frac{1}{2}\right)}$**.
De même, J est le centre de la face $ABCD$, alors J est le milieu de $[AC]$.
D'où ***J* a pour coordonnées $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2} \; ; \frac{1}{2} \; ; 0\right)}$**.
Comme K est le milieu de $[IJ]$, alors ***K* a pour coordonnées $\boldsymbol{\left(\frac{1}{4} \; ; \frac{1}{2} \; ; \frac{1}{4}\right)}$**.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{4} \; ; \frac{1}{2} \; ; \frac{1}{4}\right)$ et $(1 ; 1 ; 1)$.

Or $\frac{x_{\overrightarrow{AK}}}{x_{\overrightarrow{AG}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AK}}}{y_{\overrightarrow{AG}}}$, alors $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, **les points *A*, *K* et *G* ne sont pas alignés**. Ils déterminent donc un plan de l'espace.

3) a) $AI = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $AJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors A appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

K est le milieu de $[IJ]$, alors K appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

$GI = \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $GJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, alors G appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

D'après la question précédente, on en déduit que **le plan médiateur du segment $[IJ]$ est le plan (AKG)**.

b) D'après la question précédente, on peut dire que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal du plan (AKG).

$$
\begin{aligned}
M(x\ ;y\ ;z) \in (AKG) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 \\
&\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}-0\right) + y\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + z\left(0-\frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0 \\
&\Leftrightarrow x - z = 0
\end{aligned}
$$

Donc **(AKG) a pour équation cartésienne $x - z = 0$**.

c) $x_D = z_D = 0$, alors les coordonnées de D vérifient l'équation du plan (AKG).

Donc ***D* appartient à (AKG)**.

4) a) Comme L est le centre de la face $DCGH$, alors L est le milieu de $[DG]$.

D'où L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;1\ ;\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $\begin{cases} \frac{x_A + x_L}{2} = \frac{1}{4} = x_K \\ \frac{y_A + y_L}{2} = \frac{1}{2} = y_K \\ \frac{z_A + z_L}{2} = \frac{1}{4} = z_K \end{cases}$, et par suite, que ***K* est le milieu de $[AL]$**.

b) Soit Ω le barycentre des points pondérés $(A\ ,2)$, $(D\ ,1)$ et $(G\ ,1)$.

Comme L est le milieu de $[DG]$, L est alors l'isobarycentre des points D et G.

D'après le théorème d'associativité des barycentres, Ω est alors le barycentre des points pondérés $(A\ ,2)$ et $(L\ ,2)$, c'est-à-dire l'isobarycentre des points A et L.

On en déduit que Ω est le milieu du segment $[AL]$, et par suite, $\Omega = K$ (d'après la question précédente).

Par conséquent, ***K* est le barycentre des points pondérés $(A\ ,2)$, $(D\ ,1)$ et $(G\ ,1)$**.

4. Exercice 4 (enseignement obligatoire)

Partie A : étude d'un cas particulier

1) a) $\dfrac{-a}{b-a}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i-1-i\sqrt{3}}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}=\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}-i\right)}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4}$.

Donc $\boldsymbol{\dfrac{-a}{b-a}=i}$.

b) D'après la question précédente :
$\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{|0-a|}{|b-a|}=\left|\dfrac{-a}{b-a}\right|=|i|=1$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AO}\right)=\arg\left(\dfrac{0-a}{b-a}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$.
On en déduit que **le triangle *OAB* est rectangle isocèle en *A***.

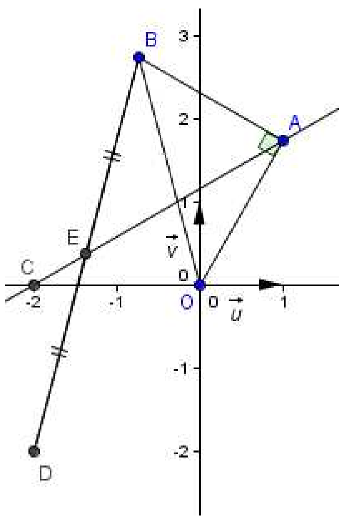
2) Comme C est l'image de A par la rotation r, alors $c-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(a-0)$.
D'où : $c=\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}$.
Par conséquent, $\boldsymbol{c=-2}$.

3) a) $m_{(AC)}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{0-\sqrt{3}}{-2-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Alors (AC) a une équation de la forme $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+p$.

Comme le point A appartient à cette droite, alors $y_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_A+p$, c'est-à-dire
$p=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Par conséquent, **la droite (AC) a pour équation $\boldsymbol{y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)}$**.

b) Soit E le milieu de $[BD]$. Alors E a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\;;\;\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Alors $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x_E+2)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+2\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{3\times 2}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=y_E$.
Par conséquent, **le milieu du segment $[BD]$ appartient à la droite (AC)**.



Partie B

1) Comme A' et B' sont les images respectives de A et B par la rotation r, alors $a'-0=\mathrm{e}^{i\theta}(a-0)$ et $b'-0=\mathrm{e}^{i\theta}(b-0)$. Donc : $\boldsymbol{a'=a\ \mathrm{e}^{i\theta}}$ et $\boldsymbol{b'=b\ \mathrm{e}^{i\theta}}$.

2) a) Comme P est le milieu de $[AA']$, alors $\boldsymbol{p}=\dfrac{a+a'}{2}=\dfrac{a+a\ \mathrm{e}^{i\theta}}{2}\boldsymbol{=\dfrac{a}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$.

Comme Q est le milieu de $[BB']$, alors $\boldsymbol{q}=\dfrac{b+b'}{2}=\dfrac{b+b\ \mathrm{e}^{i\theta}}{2}\boldsymbol{=\dfrac{b}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$.

b) $\dfrac{-p}{q-p}=\dfrac{-\dfrac{a}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)}{\dfrac{b}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)-\dfrac{a}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)}=\dfrac{-\dfrac{a}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)}{\dfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)(b-a)}=\dfrac{-a}{b-a}$. Donc : $\boldsymbol{\dfrac{-p}{q-p}=\dfrac{-a}{b-a}}$.

c) $\left(\overrightarrow{PQ}\ ,\ \overrightarrow{PO}\right)=\arg\left(\dfrac{0-p}{q-p}\right)=\arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$ (d'après les questions 2) b) de la partie B et 1) a) de la partie A).

On en déduit que **les droites (OP) et (PQ) sont perpendiculaires**.

d) Comme P est le milieu de $[AA']$ et que $r(A)=A'$, alors (OP) est la médiatrice de $[AA']$.

D'où (AA') est la droite perpendiculaire à (OP) passant par P.

D'après la question précédente, on peut en déduire que les droites (AA') et (PQ) sont confondues. Par conséquent, **le point Q appartient à la droite (AA')**.