Pondichéry

1. *Exercice 1*

4 points

1) Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ et soit H la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Justifier que f et H sont bien définies sur $[1\,;\,+\infty[$.

b) Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ du plan.

Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2) On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a) Montrer que pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x}{e^x-1}=x\times\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b) En déduire que $\int_1^3 f(x)\,dx=3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)dx$.

c) Montrer que si $1\leq x\leq 3$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\leq\ln\left(1-e^{-x}\right)\leq\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

d) En déduire un encadrement de $\int_1^3\ln\left(1-e^{-x}\right)dx$, puis de $\int_1^3 f(x)\,dx$.

2. *Exercice 2 (non spécialistes)*

5 points

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

a) Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.

Alors $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_C}\right|=\dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\,\overrightarrow{CB}\right)\quad(2\pi)$.

b) Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :

$z=e^{i\theta}$ si et seulement si $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta+2k\pi$, où k est un entier relatif.

<u>*Démonstration de cours*</u> : Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$.

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(O\ ;\vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{3}-i$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_C=\sqrt{3}+i$ et $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B , z_C et z_D .

b) Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(O\ ;\vec{u},\ \vec{v}\right)$?

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2) On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E=r\left(A\right)$ et $F=r\left(C\right)$.

a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précèdent ?

b) Donner l'écriture complexe de r.

c) Déterminer l'affixe du point E.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z'=az+b$, où $a\in\mathbf{C}^*$ et $b\in\mathbf{C}$.

<u>*Démonstration de cours*</u> : On se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{3}-i$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_C=\sqrt{3}+i$ et $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B , z_C et z_D .

b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c) Déterminer le milieu du segment $\left[AC\right]$, celui du segment $\left[BD\right]$. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$.

En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2) On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

b) Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c) Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

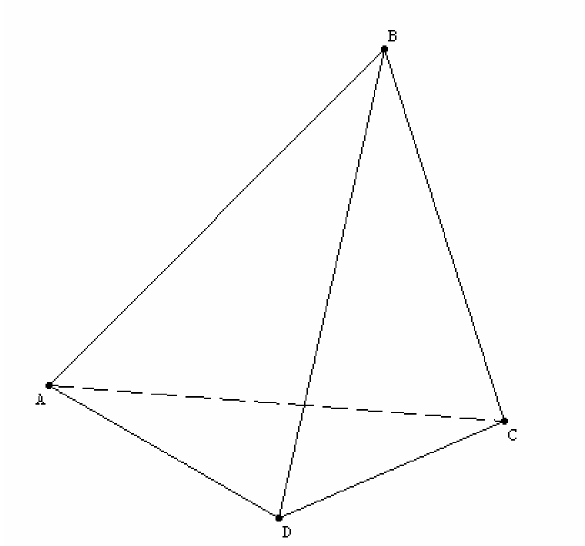
4. *Exercice 3*

4 points

On considère un tétraèdre *ABCD.*

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l' exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre *ABCD* est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2) a) Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3) a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre *ABCD?*

5. *Exercice 4*

7 points

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n \left(20 - u_n\right)$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$.

a) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

c) On donne **en annexe** la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ du plan. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n\right)_{n \geq 0}$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B: un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x, On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ :\ y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$$

1) On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1)\ :\ z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$$

b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2) Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3) Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4) Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5) En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5

millions ?

Annexe