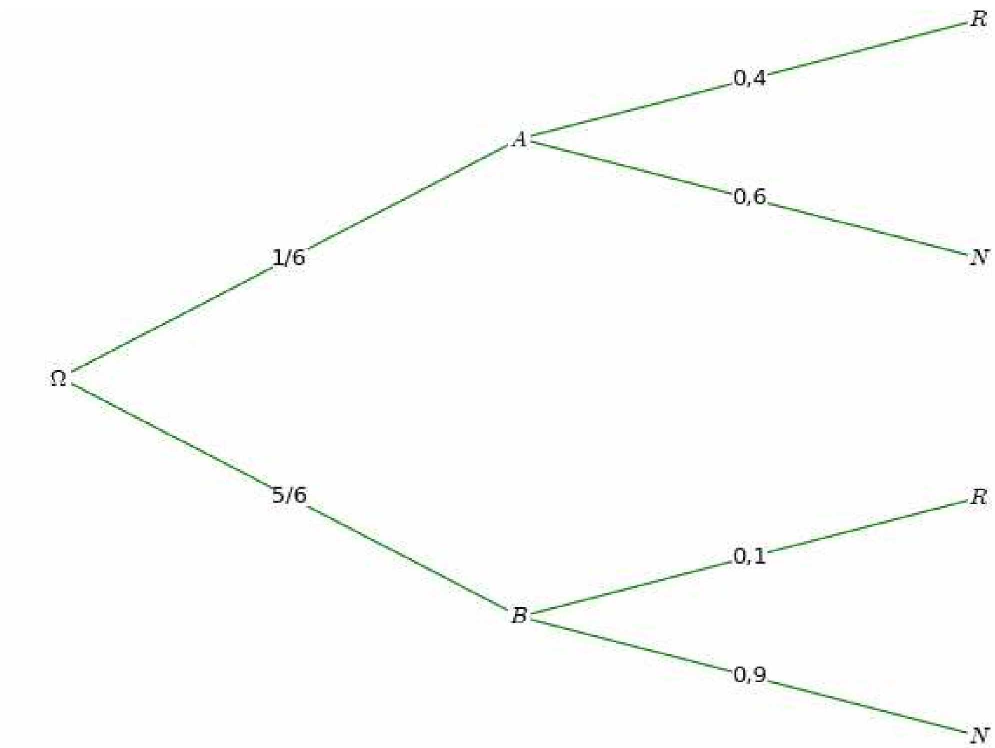
Liban

1. Exercice 1

Partie A



1) A et B forment une partition de l'univers Ω ; d'après la formule des probabilités totales, on a : $p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p_A(R) \times p(A) + p_B(R) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{p(R) = 0{,}15}$.

2) Calculons $p_R(A)$ et $p_R(B)$:

$$\boldsymbol{p_R(A)} = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}} = \boldsymbol{\frac{4}{9}} \text{ et } \boldsymbol{p_R(B)} = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}} = \boldsymbol{\frac{5}{9}}.$$

Donc, **si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de *A* est inférieure à celle qu'elle provienne de *B***.

Partie B

L'épreuve décrite dans la partie A est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir une boule rouge ». Alors $p = 0{,}15$.

Cette expérience est répétée deux fois dans des conditions identiques et indépendantes.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges obtenues suit une loi binomiale de paramètres 2 et 0,15.

Pour tout entier k compris entre 0 et 2, on a : $p(X = k) = \binom{2}{k}(0{,}15)^k (1 - 0{,}15)^{2-k}$.

1) $p(G=2x)=p(X=2)=\binom{2}{2}(0{,}15)^2=(0{,}15)^2=0{,}0225$;

$p(G=x-2)=p(X=1)=\binom{2}{1}(0{,}15)^1(0{,}85)^1=0{,}255$;

$p(G=-4)=p(X=0)=\binom{2}{0}(0{,}85)^2=0{,}7225$.

On en déduit alors la loi de probabilité de G :

g_i	$2x$	$x-2$	-4
$p(G=g_i)$	**0,0225**	**0,255**	**0,7225**

2) $\boldsymbol{E(G)}=0{,}0225\times(2x)+0{,}255\times(x-2)+0{,}7225\times(-4)=\mathbf{0{,}3x-3{,}4}$.

3) $E(G)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}3x-3{,}4\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}3x\geq 3{,}4 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq\frac{3{,}4}{0{,}3} \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 11{,}33$.

Or x est un entier naturel, donc **$E(G)\geq 0$ lorsque x est supérieur ou égal à 12**.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

Partie A

1) Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$. z^{100} est un nombre réel si, et seulement si, $\arg\left(z^{100}\right)=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Or $\arg\left(z^{100}\right)=100\times\arg(z)+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})=\frac{100\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})=-\frac{2\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z})$.

Par conséquent, z^{100} n'est pas un nombre réel, et par suite, **la proposition 1 est FAUSSE**.

2) Soit A et M les points d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_M=z$.

Alors $\left|\frac{z}{1-z}\right|=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|z|}{|1-z|}=1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|=|1-z| \quad\Leftrightarrow\quad OM=MA$.

Donc l'ensemble (E) est la médiatrice du segment $[OA]$, qui est parallèle à l'axe des imaginaires purs. Par conséquent, **la proposition 2 est FAUSSE**.

3) Soit O' l'image de O par la rotation r. Alors $z_{O'}-z_K=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_O-z_K\right)$.

D'où $z_{O'}=-i\left(-1-i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

La proposition 3 est alors VRAIE.

4) Calculons le discriminant de cette équation :

$$\Delta=\left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2-4=4\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1\right)=-4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Comme $\Delta<0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}}$$ et

$z_2=\overline{z_1}=\mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{5}}$. Ces deux complexes ont un module égal à 1. **La proposition 4 est VRAIE**.

Partie B

Travaillons dans le repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

➢ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, alors $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1\ ;1\ ;1)$.
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(-1\ ;1\ ;0)$.
$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$, alors $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(-1\ ;0\ ;1)$.
Alors $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BD}=-1+1+0=0$ et $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BE}=-1+0+1=0$.
On en déduit que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ du plan (BDE). Donc, $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).
La proposition 5 est VRAIE.

➢ $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$, alors $\overrightarrow{ED}$ a pour coordonnées $(0\ ;1\ ;\ -1)$.
Alors $\overrightarrow{ED}\bullet\overrightarrow{BE}=0+0+(-1)=-1\neq 0$; d'où $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas orthogonaux.
La proposition 6 est donc FAUSSE.

3. Exercice 2 (spécialistes)

1) Une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport k, et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.
Or :

- le rapport de s est égal à $\left|\frac{3}{2}(1-i)\right|=\frac{3}{2}\times|1-i|=\frac{3}{2}\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

- la mesure de l'angle θ est l'argument de $\frac{3}{2}(1-i)$.

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{3}{2}(1-i)\right)&=\arg\left(\frac{3}{2}\right)+\arg(1-i)+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})\\&=0+\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})\\&=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})\end{aligned}$$

- le point Ω est un point invariant par s : résolvons l'équation $z'=z$.

$$z' = z \iff \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = z$$
$$\iff \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = z$$
$$\iff \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z = -4 + 2i$$
$$\iff z = \frac{-4+2i}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i} = \frac{-2(2-i)}{\frac{1}{2}(1-3i)} = -4 \times \frac{(2-i)(1+3i)}{1^2+(-3)^2} = -\frac{4}{10} \times (2+6i-i+3) = -2-2i$$

D'où Ω a pour affixe $-2-2i$.

La proposition 1 est alors VRAIE.

2) ➢ Si $n=1$, alors $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 78141$, qui n'est pas divisible par 5.

La proposition 2 est alors FAUSSE.

➢ $5^{6n+1} = \left(5^6\right)^n \times 5$. Or $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, alors $\left(5^6\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$, c'est-à-dire $\left(5^6\right)^n \equiv 1 \pmod 7$. Donc $5^{6n+1} \equiv 1 \times 5 \pmod 7$.

$2^{3n+1} = \left(2^3\right)^n \times 2$. Or $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, alors $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$, c'est-à-dire $\left(2^3\right)^n \equiv 1 \pmod 7$. Donc $2^{3n+1} \equiv 1 \times 2 \pmod 7$.

Par suite, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 5+2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$. On en déduit que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7, pour tout entier naturel *n*.

La proposition 3 est alors VRAIE.

3) Le couple $(14\ ;\ 28)$ est un couple solution de l'équation $11x - 5y = 14$.

Alors, $11x - 5y = 14$ équivaut à $11x - 5y = 11 \times (14) - 5 \times (28)$, ou encore à $11(x-14) = 5(y-28)$.

On en déduit que 5 divise $11(x-14)$, et comme 5 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x-14$. Il existe donc un entier k tel que $x - 14 = 5k$, c'est-à-dire $x = 14 + 5k$. En remplaçant x par $14+5k$ dans l'égalité $11(x-14) = 5(y-28)$, on a : $11 \times 5k = 5(y-28)$, soit $y - 28 = 11k$, c'est-à-dire $y = 28 + 11k$.

Réciproquement, on vérifie que tous les couples de la forme $(14+5k\ ;\ 28+11k)$, où k appartient à **Z**, sont solutions de l'équation $11x - 5y = 14$.

$11(14+5k) - 5(28+11k) = 154 - 140 = 14$. Ce qui vérifie ce que l'on souhaite.

Par conséquent, **l'ensemble de solutions de l'équation $11x - 5y = 14$ est l'ensemble des couples de la forme $(14+5k\ ;\ 28+11k)$, où k appartient à Z**.

La proposition 4 est alors VRAIE.

4) ➢ Soit (P) le plan d'équation $x = \lambda$.

$$M(x\ ;y\ ;z) \in (P) \cap \Sigma \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x = \lambda \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = y^2 + \lambda^2 \\ x = \lambda \end{cases}$$

On en déduit que la section de Σ et du plan (P) d'équation $x=\lambda$ est une parabole d'équation $z=y^2+\lambda^2$, tracée dans le plan.
La proposition 5 est alors FAUSSE.

➢ Soit $(\mathscr{H})$ le solide délimité par Σ et par le plan d'équation $z=9$.
- Cherchons la section de $(\mathscr{H})$ par le plan (Q) d'équation $z=k$, avec $k\in[a\ ;\ b]$.

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(Q)\cap\Sigma \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2+y^2=z\\ z=k\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2+y^2=k\\ z=k\end{cases}.$$

Alors, la section de $(\mathscr{H})$ par le plan (Q) d'équation $z=k$, avec $k\in[a\ ;\ b]$, est un disque de rayon $\sqrt{k}$, qui admet pour aire $S(k)=\pi\times\left(\sqrt{k}\right)^2=\pi k$.

- Calculons le volume de $(\mathscr{H})$: $V_{(\mathscr{H})}=\int_0^9 S(k)dk=\int_0^9 \pi k\ dk=\left[\frac{\pi k^2}{2}\right]_0^9=\frac{81\pi}{2}$.

- Soit $(\mathscr{C})$ le solide délimité par Σ et par le plan d'équation $z=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Calculons le volume de $(\mathscr{C})$: $V_{(\mathscr{C})}=\int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} S(k)dk=\int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} \pi k\ dk=\left[\frac{\pi k^2}{2}\right]_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(81\times\frac{2}{4}\right)\pi}{2}=\frac{81\pi}{4}$.

- On en déduit alors que $V_{(\mathscr{C})}=\frac{1}{2}V_{(\mathscr{H})}$; **la proposition 5 est alors VRAIE**.

4. Exercice 3

Partie A

Soit une suite (u_n) non majorée et croissante, et A un réel arbitraire.

Comme la suite est non majorée, il existe au moins un terme u_p de la suite tel que $u_p>A$.

Or la suite étant croissante, si l'on prend n supérieur à p, on aura u_n supérieur à u_p, c'est-à-dire, u_n supérieur à A.

Donc on a prouvé que, à partir du terme u_p, tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

C'est la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Partie B

1) On a $f=\ln(u)+v$ avec $u(x)=x+1$ et $v(x)=\frac{1}{2}x^2$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$; de plus, la fonction v est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

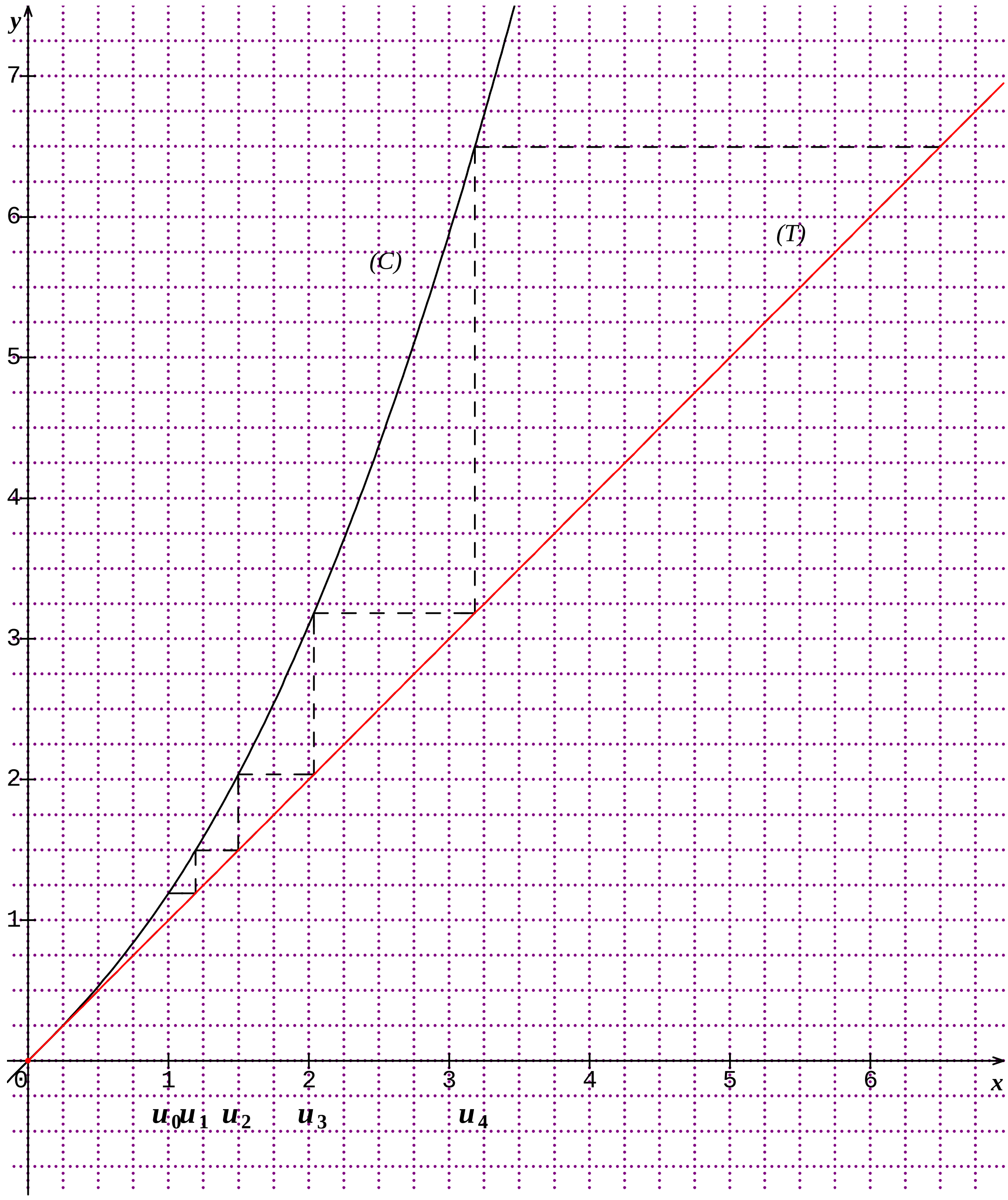
Soit un réel x positif. $f' = \frac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = x$.

D'où $f'(x) = \frac{1}{x+1} + x$. Comme x est positif, $\frac{1}{x+1}$ est positif. Par suite, $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, **la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$**.

2) (T) a une équation de la forme $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f'(0) = \frac{1}{0+1} + 0 = 1$ et $f(0) = \ln(1) + 0 = 0$. Donc (T) **a pour équation $y = x$**.

3)



Partie C

1) Voir figure ci-dessus.

2) **D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.**

3) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout n de **N**, $u_n \geq 1$ »

→ Comme $u_0 = 1$, alors on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ Montrons que pour tout $n \geq 0$, on a : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors : $u_n \geq 1$.
Comme f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors $f(u_n) \geq f(1)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$. Or $\ln 2 + \frac{1}{2} \simeq 1{,}2$ Donc : $u_{n+1} \geq 1$. On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :
$\mathcal{P}(0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :
pour tout n supérieur ou égal à 1, $\mathcal{P}(n)$ est vraie
C'est-à-dire : **pour tout n de N, $u_n \geq 1$.**

b) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
Or $u_n \geq 1$ pour tout n de **N**, d'après la **partie B**, on en déduit que $f(u_n) \geq u_n$ (en effet, la courbe (C) est au-dessus de (T) sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[1\ ;\ +\infty[$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n de **N**. Par conséquent, **la suite (u_n) est croissante**.

c) Supposons que la suite (u_n) est majorée. De plus, la suite (u_n) est croissante. Or une suite croissante et majorée est une suite convergente, alors (u_n) converge vers un réel ℓ.
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la fonction f est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors $\ell = f(\ell)$.
D'après les hypothèses, l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $x = 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Dans ce cas, ℓ ne peut être égal qu'à 0. Ce qui absurde car $u_n \geq 1$ pour tout entier naturel n.
Par conséquent, **la suite (u_n) n'est pas majorée**.

d) La suite (u_n) est donc croissante et non majorée ; d'après la **partie A**, on en déduit que **la suite (u_n) tend vers $+\infty$**.

5. Exercice 4

Partie A

1) Voir page suivante.

2) a) $g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt$; de plus, f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, alors **$g(2)$ est l'aire sous la courbe (C) sur l'intervalle $[0\,;2]$**.

b) D'après le tableau de variations de f , on peut dire que pour tout réel t de $[0\ ;\ 2]$,

$0 \le f(t) \le 1+e^{-2}$, et que f est continue sur $[0\ ;\ 2]$.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $0\times(2-0) \le \int_0^2 f(t)dt \le (1+e^{-2})\times(2-0)$, c'est-à-dire

$0 \le \int_0^2 f(t)dt \le 2(1+e^{-2})$. Or $2(1+e^{-2}) \simeq 2{,}3$ et $g(2)=\int_0^2 f(t)dt$.

Par conséquent, $\mathbf{0 \le g(2) \le 2{,}5}$.

3) a) Soit x un réel supérieur à 2. D'après le tableau de variations de f, pour tout réel t de $[2\ ;\ +\infty[$, $f(t) \ge 1$.

Comme les fonctions $t \mapsto 1$ et f sont continues sur $[2\ ;\ +\infty[$, d'après le respect de l'ordre par intégration, $\int_2^x f(t)dt \ge \int_2^x 1\, dt$.

Or $\int_2^x 1\, dt = 1\times(x-2) = x-2$; donc, $\boldsymbol{\int_2^x f(t)dt \ge x-2}$**, pour tout réel $\boldsymbol{x}$ supérieur à 2**.

De plus, $g(x)=\int_0^x f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt$ d'après la relation de Chasles.

D'où : $g(x)=g(2)+\int_2^x f(t)dt$. Comme $g(2)\ge 0$ (d'après la question 2) b)) et que

$\int_2^x f(t)dt \ge x-2$, on en déduit que $\boldsymbol{g(x) \ge x-2}$**, pour tout réel $\boldsymbol{x}$ supérieur à 2**.

b) Comme $g(x)\ge x-2$ pour tout réel x de $[2\ ;\ +\infty[$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

4) Comme $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, alors g est la primitive de f sur **R** s'annulant en 0.

Par définition, on en déduit que, pour tout réel x de **R**, $g'(x)=f(x)$.

Or, d'après le tableau de variations de f, on peut dire que $f(x)\ge 0$ lorsque x appartient à $[0\ ;\ +\infty[$ et que $f(x)\le 0$ lorsque x appartient à $]-\infty\ ;\ 0]$.

Donc **la fonction $\boldsymbol{g}$ est strictement décroissante sur $\boldsymbol{]-\infty\ ;0]}$ et strictement croissante sur $\boldsymbol{[0\ ;+\infty[}$** .

Partie B

1) $\mathcal{I}=\int_0^x (t-1)e^{-t}\ dt$.

Posons $u'(t)=e^{-t}$ et $v(t)=t-1$; alors $u(t)=-e^{-t}$ et $v'(t)=1$.

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle.

Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$\mathcal{I}=\int_0^x (t-1)e^{-t}\ dt = \left[-(t-1)e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}\ dt = \left[-(x-1)e^{-x}-1\right]-\left[e^{-t}\right]_0^x$$

Alors $\boldsymbol{\int_0^x (t-1)e^{-t}\ dt} = \left[-(x-1)e^{-x}-1\right]-e^{-x}+1 = \boldsymbol{-xe^{-x}}$.

2) $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left((t-1)\mathrm{e}^{-t}+1\right)dt=\int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{-t}dt+\int_0^x 1\,dt$ d'après la linéarité de l'intégration.

D'où : $g(x)=-x\mathrm{e}^{-x}+1\times(x-0)=x-x\mathrm{e}^{-x}$, d'après la question précédente.

Donc $\boldsymbol{g(x)=x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}$**, pour tout réel** $\boldsymbol{x}$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$ (limite d'une fonction composée).

On en déduit alors que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)=-\infty$ (produit et somme des limites)

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty}$ (produit des limites).