

Annexe

Mathématiques

CLASSE TERMINALE DE LA SÉRIE LITTÉRAIRE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Introduction

Ce programme, articulé à la fois avec le programme de l'option et celui de l'enseignement obligatoire de mathématiques-informatique de la classe de première L, a été conçu comme achevant le cycle de cette formation en deux ans. Il tient compte du temps nécessaire à l'appropriation des contenus et des méthodes par les élèves et permet donc un travail de réflexion approfondie.

Les finalités de cette formation

Les élèves issus de la série L ayant choisi cette spécialité sont appelés à suivre des cursus variés, non seulement en lettres, en langues et en arts, mais aussi en sciences humaines et en sciences sociales, ou encore vers les carrières de l'enseignement. Ils doivent pouvoir s'adapter à différents niveaux d'exigence en mathématiques. Quatre dimensions ont été principalement prises en compte dans l'élaboration de ce programme : personnelle, sociale, professionnelle et culturelle.

- *dimension personnelle* : la connaissance des règles élémentaires du raisonnement déductif, forme particulière d'argumentation qui intervient dans les démonstrations mathématiques, peut permettre de repérer ce qui le distingue d'autres types de raisonnement et de déceler les limites, voire de repérer les failles d'une argumentation.

- *dimension sociale* : la vie dans un pays démocratique, qui bénéficie d'un environnement technologique évolué, nécessite que l'individu sache analyser et lire de façon critique l'information chiffrée transmise par les médias, afin d'être à même de porter un jugement éclairé sur les débats de société.

- *dimension professionnelle* : les divers champs des mathématiques tiennent de plus en plus de place dans le secteur professionnel, non seulement dans les professions scientifiques, mais aussi dans celles qui relèvent des sciences humaines et des sciences sociales ; en particulier, les modèles mathématiques et la simulation y sont devenus des outils courants d'analyse et de prévision.

- *dimension culturelle* : quoiqu'il fasse partie du patrimoine de l'humanité, il s'avère que la culture scientifique n'a pas actuellement la place qui lui revient dans la culture générale. Pour ce qui concerne les mathématiques, elles ont d'une part une histoire, qui est liée à l'évolution des civilisations qui les ont engendrées et qui se continue encore aujourd'hui, et d'autre part des liens avec d'autres champs d'étude importants pour les élèves de cette série, comme la littérature, les arts, la philosophie.

Libellé du programme

Le programme se présente selon trois entrées, classiquement proposées en trois colonnes : les *contenus* à aborder, bien sûr, mais aussi des précisions sur les *modalités* préconisées pour aborder certains contenus, ainsi que des *commentaires* de nature variée. Le professeur a bien sûr toute liberté pour choisir l'ordre d'exposition des différentes parties du programme.

Répartition

A titre indicatif, on peut prévoir de consacrer 25% du temps à l'arithmétique, 35% à l'analyse, 20% aux probabilités et statistique, 20% à la géométrie.

1-Les contenus disciplinaires

Ils se regroupent selon les deux grands domaines que sont le nombre et l'espace.

Dans le domaine numérique

La partie consacrée à l'arithmétique prolonge l'étude entreprise en première en introduisant un nouvel outil, les congruences, et un nouveau mode de raisonnement, la récurrence.

Le programme d'analyse poursuit l'étude des nombres amorcée en première, en se centrant sur l'écriture décimale des nombres réels. Les fonctions exponentielles sont introduites à partir des suites géométriques, dans le prolongement du programme de mathématiques-informatique de la classe de première. Les fonctions logarithmes sont ensuite présentées comme fonctions réciproques de celles-ci.

La partie statistique et probabilités complète de façon classique l'étude abordée en classe de première, et introduit les probabilités conditionnelles et l'indépendance. Comme dans les autres séries, le problème de l'adéquation de données à une loi équirépartie est abordé.

Dans le domaine de l'espace

La problématique de la représentation de l'espace en fonction des finalités visées, artistiques ou techniques, conduit d'une part à mettre en oeuvre les connaissances géométriques, dans l'espace mais aussi dans le plan, et d'autre part à aborder des questions de nature culturelle et artistique.

La représentation en perspective centrale vient compléter la représentation en perspective parallèle étudiée dans l'option de la classe de première.

2-Deux domaines transversaux : logique et algorithmique

Enfin, deux domaines transversaux viennent irriguer l'ensemble du programme : il s'agit de la logique et de l'algorithmique, qui trouvent toutes deux des terrains d'application pertinents dans plusieurs des contenus abordés. Ils ne feront pas l'objet d'un exposé théorique isolé.

Pour ce qui concerne la logique

Il s'agit de poursuivre le travail amorcé en classe de première.

Plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre et plusieurs notions peuvent être rencontrées et travaillées en situation : implication et réciproque, double implication, raisonnement par disjonction de cas, par l'absurde, par récurrence...

L'arithmétique apparaît comme un domaine privilégié pour travailler le raisonnement, car les notions de base qu'on y rencontre sont depuis longtemps familières aux élèves et ne nécessitent que peu de connaissances techniques. Les autres domaines abordés dans le programme participent aussi à cette construction. Chaque fois qu'un travail de ce type semble possible, cela est signalé dans la colonne *Modalités* ou, le cas échéant, dans la colonne *Commentaires*.

Des compétences élémentaires de logique sont visées par ce travail transversal sur les deux années de cette formation. Les élèves devront être capables de les utiliser dans un champ de connaissances qui leur est suffisamment familier. Ce travail d'appropriation de

quelques règles de logique ne peut se faire que progressivement, par petites touches, et de façon non dogmatique.

Pour ce qui concerne les activités algorithmiques

Elles apportent un éclairage pratique par l'étude de problèmes liés à la réalisation effective des opérations mathématiques.

Les objectifs du programme dans ce domaine sont :

- d'attirer l'attention des élèves sur la différence entre la résolution abstraite d'un problème et la succession des opérations permettant de produire un objet mathématique qui en est solution, exacte ou approchée ;
- de soulever la question de l'efficacité des algorithmes rencontrés, en terme de nombre d'opérations élémentaires nécessaires.

L'algorithme est ici considéré comme un outil dont on s'attache à découvrir les propriétés, sans toutefois développer une théorie, même très élémentaire, de la complexité ou de la rapidité.

3-Organisation du travail des élèves et TICE

Comme dans toutes les autres séries, des travaux personnels de rédaction courts et fréquents doivent être proposés aux élèves.

Dans toutes les parties du programme, l'utilisation des outils informatiques (ordinateurs en utilisation individuelle ou collective, calculatrices programmables) est importante. En particulier les compétences des élèves sur l'utilisation des tableurs seront mises à profit.

Arithmétique

Les objectifs du programme d'arithmétique de cette classe terminale sont dans la continuité de ceux définis en classe de première. L'arithmétique est un domaine où la construction et la mise en œuvre de compétences en logique et en algorithmique sont particulièrement utiles et pertinentes, même si ce n'est évidemment pas le seul domaine où il en est ainsi.

Les contenus proposés et les problèmes traités doivent permettre :

- de travailler à construire et à consolider, en situation, des connaissances de logique qui garantissent la validité d'un raisonnement ;

- d'élargir la palette des types de raisonnement mobilisables par les élèves, en particulier en introduisant le raisonnement par récurrence dans des cas où il est pertinent ;
- de montrer que le passage au niveau supérieur d'abstraction que représente l'introduction des congruences dans les problèmes d'arithmétique permet d'augmenter de manière significative la puissance de certains raisonnements ;
- de construire et de présenter quelques algorithmes classiques, d'en proposer une programmation sur calculatrice, tableur ou à l'aide d'un logiciel adapté.

Contenus	Modalités	Commentaires
Initiation au raisonnement par récurrence : propriété héréditaire ; principe de récurrence.	Ce type de raisonnement est mis en place à partir d'exemples. Le principe de récurrence est une propriété fondamentale de \mathbb{N} qui est admise.	Se garder de tout excès de technicité.
Définition de la division euclidienne dans \mathbb{N}	Pour a entier naturel et b entier naturel non nul, on admet l'existence et l'unicité des entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$	Il s'agit : - de faire le lien entre une opération connue des élèves depuis longtemps et une définition formalisée, sous la forme d'une proposition quantifiée existentiellement ; - d'écrire un algorithme de division euclidienne de deux naturels et de le mettre en oeuvre sur calculatrice ou tableur.
Multiples d'un naturel dans \mathbb{Z}	On complète la liste des multiples d'un naturel n dans \mathbb{N} par celle de leurs opposés.	
Congruence dans \mathbb{Z}	Pour a et b entiers relatifs, et n entier naturel non nul, $a \equiv b (n)$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n dans \mathbb{Z} .	Pour a et b entiers naturels, l'équivalence de cette définition avec : "a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n" sera démontrée. C'est l'occasion de travailler sur la double implication et d'utiliser un énoncé existentiel dans une preuve.
Compatibilité avec l'addition et la multiplication.	Ces propriétés sont à démontrer.	Les preuves peuvent s'appuyer sur des exemples génériques.
Applications : - aux clefs de contrôle. - aux problèmes de divisibilité, et entre autres aux critères de divisibilité par 3, 4, 9, 11	Les exemples peuvent, entre autres, être choisis parmi les suivants : Numéro INSEE , numéro ISBN, code à barres, code bancaire, « preuve » par 9.	Comparer, pour certains problèmes, différents types de résolution, comme par exemple l'utilisation de raisonnements: - par disjonction de cas, - par récurrence, - à l'aide de congruences.

Analyse

La partie Analyse de ce programme a un double objectif :

D'une part, proposer la poursuite de l'étude des nombres.

Dans le programme de l'option obligatoire de première, l'objet de cette étude a été limité aux nombres entiers et à leurs diverses écritures. Compléter les connaissances sur les suites et tout particulièrement sur les suites géométriques conduit les élèves à une compréhension plus précise des nombres rationnels et de leur écriture décimale. Par ailleurs, les situations dans lesquelles interviennent les suites permettent la mise en œuvre ou l'interprétation d'algorithmes.

D'autre part enrichir l'ensemble des fonctions dont disposent les élèves.

Il s'agit non seulement de poursuivre le travail sur les fonctions usuelles étudiées en première en les mobilisant lors de résolutions de problèmes, mais aussi d'introduire des fonctions nouvelles fournissant des modèles continus pour divers types de croissance, entre autres ceux déjà rencontrés à l'occasion de l'étude des suites dans le programme de première mathématiques-informatique (croissances linéaire, exponentielle et éventuellement à différence seconde constante).

Il convient d'éviter tout excès de technicité dans les études de fonctions.

contenus	modalités	commentaires
<p><i>Complément sur les suites arithmétiques et géométriques</i></p> <p>Somme de termes successifs d'une suite arithmétique. Somme de termes successifs d'une suite géométrique.</p> <p>Limite d'une suite géométrique de raison positive, et conséquences pour la somme des termes consécutifs d'une telle suite.</p>	<p>Privilégier la mise en œuvre d'une méthode plutôt que l'application d'une formule.</p> <p>Les élèves doivent connaître le comportement, suivant les valeurs de q, de q^n lorsque n tend vers l'infini.</p> <p>Les élèves doivent pouvoir en déduire le comportement lorsque n tend vers l'infini d'une expression de la forme : $k \frac{1-q^n}{1-q}$.</p>	<p>Disposer d'une expression de la somme des premiers termes d'une suite géométrique permettra ensuite d'associer à certains développements décimaux un quotient d'entiers.</p> <p>Pour aborder cette notion, la démarche expérimentale abordée dans le programme de première est à conserver : les potentialités d'un tableur (tableau de valeurs, nuage de points) sont à exploiter. Les notions de suite tendant vers l'infini ou de suite convergente ne sont pas à définir de façon formelle.</p> <p>Aucune difficulté théorique à propos des opérations sur les limites ne sera soulevée à ce propos.</p> <p>Le comportement lorsque n tend vers l'infini de la somme des n premiers termes de certaines suites géométriques est un exemple de suite croissante ne tendant pas vers l'infini. C'est une occasion d'évoquer les aspects historique et philosophique de ces questions en présentant quelques paradoxes classiques.</p>
<p><i>Ecriture décimale des nombres réels.</i></p> <p>Ecriture décimale d'un quotient d'entiers. Caractérisation d'un nombre rationnel.</p>	<p>Les élèves doivent être capables, sur des exemples :</p> <ul style="list-style-type: none"> - de déterminer l'écriture décimale périodique d'un quotient d'entiers, - de reconnaître un nombre dont la partie décimale est périodique à partir d'un certain rang comme un quotient d'entiers. 	<p>Les irrationnels apparaissent ainsi comme les nombres dont le développement décimal illimité n'est pas périodique.</p>
<p><i>Introduction aux fonctions exponentielles</i></p>	<p>Les fonctions exponentielles sont à présenter comme <i>prolongement</i> des suites géométriques de premier terme 1 et de raison q strictement positive.</p> <p>Ce prolongement repose sur un processus dichotomique qui conserve la propriété de transformation d'une moyenne arithmétique en moyenne géométrique. On obtient ainsi un nombre croissant de points suggérant la courbe d'une fonction. On admet que cette fonction existe, est unique et est strictement positive.</p>	<p>La démarche proposée est expérimentale et consiste à compléter le nuage des points représentant les puissances entières d'un nombre réel strictement positif q.</p> <p>A chaque étape on construit entre deux points le point dont l'abscisse est la moyenne arithmétique des abscisses de ces points et l'ordonnée est la moyenne géométrique de leurs ordonnées.</p>

contenus	modalités	commentaires
Notation q^x ; Pour tous réels x et y : $q^x q^y = q^{x+y}$ Pour tout réel x , $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$	Admettre que les fonctions $x \mapsto q^x$: - sont dérivables sur \mathbb{R} - transforment les sommes en produits	
Fonction exponentielle de base e (notée exp) Elle est présentée comme la fonction exponentielle dont le nombre dérivé en 0 est 1. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction. Conséquences : - la fonction exp est strictement positive sur \mathbb{R} ; - les images des entiers sont les termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison e. Notation $\exp(x) = e^x$, pour tout réel x. Fonction dérivée de la fonction exp : $\exp' = \exp$ La fonction exp est croissante sur \mathbb{R} Conséquence : $e > 1$ Limite de la fonction exp en $+\infty$ et $-\infty$. Dérivée de : $x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I.	Admettre l'existence et l'unicité de cette fonction exponentielle. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = e^x$ S'appuyer sur l'égalité : $\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \times \frac{e^h - 1}{h}$ et le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0. Admettre les résultats. On s'appuie sur l'étude expérimentale du comportement de la fonction pour de grandes valeurs de la variable. Admettre la formule.	Faire observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles obtenues en faisant varier la raison, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. La fonction exp conserve l'ordre sur \mathbb{R} Aucune définition formelle de la limite d'une fonction n'est à donner. Exploiter le fait que la suite de terme général e^n tend vers $+\infty$, que celle de terme général e^{-n} tend vers 0. Cette dérivée est nécessaire à l'étude de certains modèles exponentiels pour lesquels on se limite à des fonctions u affines.
<i>Fonction logarithme népérien</i> Définition de la fonction logarithme népérien, notée ln, à partir de la fonction exp. La fonction ln transforme les produits en sommes. Fonction dérivée de la fonction ln La fonction ln est croissante sur $]0; +\infty[$. Limite de la fonction ln en $+\infty$ et en 0.	On pourra introduire la fonction ln, soit comme la fonction qui à tout nombre réel strictement positif a associe l'unique solution de l'équation $\exp(x) = a$, soit comme la fonction dont la courbe représentative en repère orthonormal est l'image de la courbe de exp dans la réflexion dont l'axe est la droite d'équation $y=x$. Admettre la dérivabilité de la fonction ln et déterminer sa fonction dérivée.	On ne soulèvera aucune difficulté sur l'existence d'une solution à une telle équation. Cette détermination peut s'appuyer sur la symétries des courbes des fonctions ln et exp, ou sur le calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(\ln(x))$. La fonction ln conserve l'ordre sur $]0; +\infty[$.

contenus	modalités	commentaires
Dérivée de : $x \mapsto \ln(u(x))$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .	Admettre la formule. Admettre les résultats en s'appuyant sur les limites de l'exponentielle et la symétrie des courbes des fonctions \ln et \exp ,	Cette dérivée est nécessaire à l'étude de certains modèles logarithmiques pour lesquelles on se limite à des fonctions u affines.
Fonction logarithme décimal Résolution de problèmes	Procéder comme pour le logarithme népérien à partir de l'équation $10^x = a$ ou de la fonction exponentielle $x \mapsto 10^x$. Étude de situations modélisées faisant intervenir des fonctions exponentielles ou logarithmes.	Outre son intérêt historique, qui est à souligner, le logarithme décimal est très utilisé dans des domaines variés : unités physiques relatives à la perception (décibel, savart...), pH, etc. La dérivée du logarithme décimal est hors programme. Les problèmes abordés seront issus de domaines divers.

Statistique et probabilités

Le programme complète celui de la classe de première en suivant deux directions.

Tout modèle supposant un choix, une ouverture est faite en direction de la statistique inductive. Le paragraphe concernant le problème de l'adéquation de données expérimentales à un modèle équiréparti figure dans les programmes des classes terminales des séries S et ES ; il a été repris ici sans modification significative.

Le modèle probabiliste, introduit l'année précédente *a minima*, est enrichi par la présentation de notions relatives au conditionnement et à l'indépendance ce qui permet de réinvestir certaines notions logiques.

Contenus	Modalités	Commentaires
<i>Statistique</i> Statistique et simulation.	Étude d'exemples traitant de l'adéquation de données expérimentales à une loi équirépartie.	L'élève devra être sensibilisé au problème de l'adéquation à une loi équirépartie et être capable d'exploiter les résultats de simulations que l'on lui fournira. Le vocabulaire des tests (hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.
<i>Probabilités</i> Représentation d'un modèle probabiliste attaché à une épreuve aléatoire par un arbre pondéré. Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Indépendance de deux événements. Formule des probabilités totales	Des calculs de fréquences permettent d'introduire la probabilité P_A quand la probabilité de A n'est pas nulle. On utilise divers outils : diagrammes, arbres, tableaux. Elle sera présentée à travers des exemples divers (tests médicaux de dépistage, contrôle de qualité, etc.)	Exploiter les acquis sur les outils graphiques de dénombrement (arbres, tableaux) du programme de première (mathématiques-informatique et option). Les arbres de probabilité mettent en évidence l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve. Les élèves doivent être capables de calculer une probabilité en utilisant la formule, un arbre pondéré ou un tableau.

Géométrie

Grâce au programme de l'option de première, les élèves disposent désormais à la fois de résultats de géométrie dans l'espace et d'un outil de visualisation des configurations, la perspective parallèle. Il s'agit maintenant d'étudier les rudiments de la perspective centrale, mode géométrique de représentation de l'espace qui a constitué, durant plusieurs siècles, le principe de la réalisation des œuvres d'art

pictural en Occident. Des maquettes et des logiciels de géométrie dynamique sont des auxiliaires essentiels de l'apprentissage. A l'issue de ces deux années, le lien entre les deux modes de représentation peut être mis en relief en faisant apparaître la perspective parallèle comme un cas limite de la perspective centrale (point de vue « à l'infini »).

Contenus	Modalités	Commentaires
Perspective centrale	Étude préliminaire de « l'ombre au flambeau » : ombre portée sur un plan par une source lumineuse ponctuelle à distance finie.	

Contenus	Modalités	Commentaires
<i>Définition</i> : un plan P et un point O (non situé dans P) étant donnés, l'image d'un point M, distinct de O, est l'intersection de la droite (OM) avec le plan P, si elle existe.	La transition entre l'ombre au flambeau et la perspective centrale peut être réalisée grâce à la « fenêtre de Dürer », en comparant les rôles : - du point de vue et de la source lumineuse - du plan du tableau et du plan de l'ombre portée.	Cette projection est aussi appelée projection conique ou centrale. Le vocabulaire usuel de la perspective centrale est introduit progressivement : point de vue, plan du tableau, plan frontal.
Propriétés conservées : alignement, forme dans les plans frontaux Point de fuite d'une droite. Positions relatives des images de deux droites parallèles.		Non conservation du milieu, du parallélisme et de l'orthogonalité.
Point de fuite principal Ligne de fuite d'un plan non frontal. La ligne d'horizon. Points de distance Applications au dessin : carrelage, pavé droit.	Le point de fuite d'une droite d est l'intersection du plan du tableau avec la droite parallèle à d passant par le point de vue. Réalisation de dessins en s'appuyant sur les propriétés de la perspective centrale	Deux plans parallèles non frontaux ont la même ligne de fuite. Dans les applications, une seule ligne de fuite est utilisée. Le problème du dessin d'un carrelage est l'un des plus célèbres parmi ceux que se sont posés les peintres du début de la Renaissance.

Argumentation mathématique

Analyse de raisonnement

L'option mathématique s'adresse à des élèves qui, dans leurs études ultérieures et/ou leur vie professionnelle, devront être capables de comprendre et de produire des argumentations ou des raisonnements mathématiques, dans des domaines variés.

Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique isolé. Ces notions sont à travailler progressivement et à mobiliser dans toutes les parties du programme sur l'ensemble du cycle terminal.

Les élèves seront entraînés, *sur des exemples simples* :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques "et" et "ou", et à distinguer leur sens des différents sens du "et" et du "ou" en langage usuel ;
- à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, et particulièrement dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer une proposition conditionnelle de sa réciproque ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition au sens de la logique mathématique et à utiliser un contre-exemple ;
- à reconnaître et utiliser des types de preuves spécifiques comme le recours à la contraposée, le raisonnement par disjonction de cas, le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par récurrence.

Activités algorithmiques

Le programme donne aux élèves diverses occasions de rencontrer des algorithmes.
Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique isolé.

Ces notions sont à travailler progressivement et à mobiliser dans toutes les parties du programme sur l'ensemble du cycle terminal.

Les élèves seront entraînés :

- à décrire certains algorithmes en langage naturel ;
- à en réaliser quelques-uns parmi les plus simples, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, ou d'un logiciel adapté ;
- à interpréter des algorithmes plus complexes (c'est-à-dire à identifier ce qu'ils "produisent").

L'utilisation des fonctions logiques du tableur est l'occasion de compléter le travail fait dans le domaine de la logique.