Liban

1. *Exercice 1*

1) a) Comme le client gratte au hasard une case, alors on est dans une situation d'équiprobabilité. Lorsqu'il gratte la première case, il y aura 25 cases blanches favorables parmi les 28 cases.

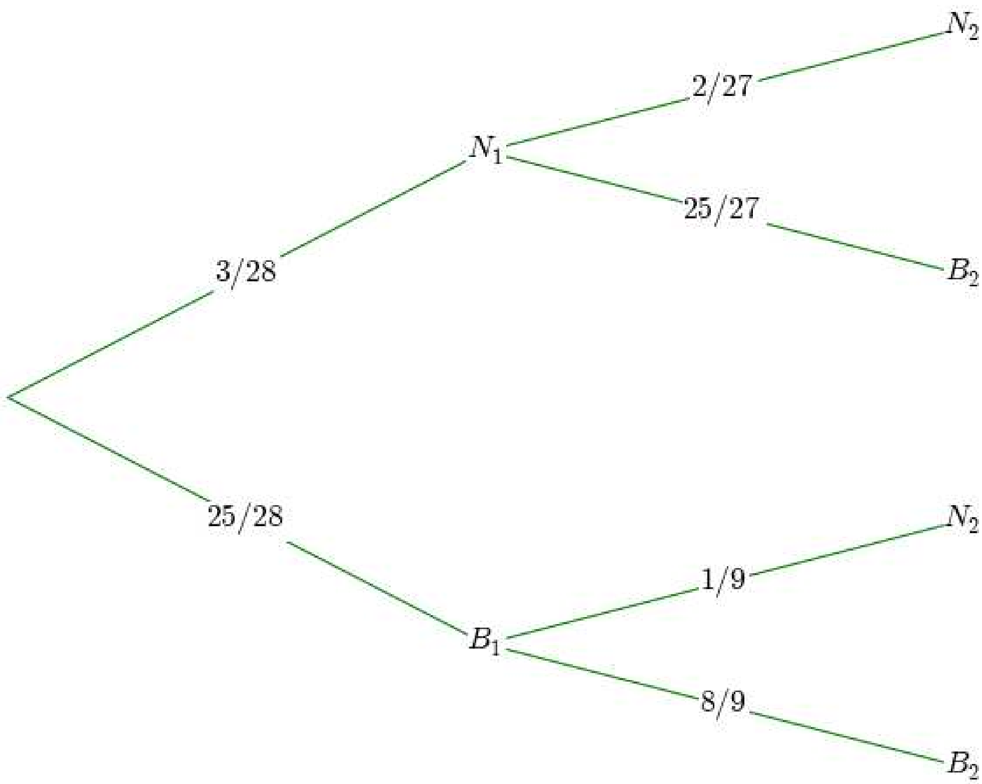
Donc, **la probabilité qu'il découvre une case blanche au 1er grattage est égale à $\mathbf{\frac{25}{28}}$**.

b) Sachant que le client est tombé sur une case blanche au 1er grattage, il reste 3 cases noires et 24 cases blanches au 2nd grattage.

La probabilité d'obtenir une case noire est alors égale à $\frac{3}{27}$, c'est-à-dire $\frac{1}{9}$.

Donc, **sachant que le client a découvert une case blanche en grattant la 1ère case, la probabilité qu'il découvre une case noire en grattant la seconde case est égale à $\mathbf{\frac{1}{9}}$**.

2)



3) a) $\boldsymbol{p(E)} = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) = \frac{3}{28} \times \frac{2}{27} = \frac{1}{14 \times 9} \mathbf{=} \mathbf{\frac{1}{126}}$.

b) $p(F) = p(N_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(B_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(N_2)$.

Alors $\boldsymbol{p(F)} = \frac{3}{28} \times \frac{25}{27} + \frac{25}{28} \times \frac{1}{9} = \frac{1 \times 25}{28 \times 9} + \frac{25 \times 1}{28 \times 9} = \frac{2 \times 25}{28 \times 9} = \frac{25}{14 \times 9} \mathbf{=} \mathbf{\frac{25}{126}}$

2. Exercice 2

1)

	Valeur de *P*	Valeur de *U*	Valeur de *S*
Initialisation	0	4	4
Étape 1	1	6	10
Étape 2	2	8 (1)	18
Étape 3	3	10	28
Étape 4	4	12	40
Étape 5	4	12	54
Affichage			**54**

(1) $4+2\times 2=8$
(2) $10+8=18$

2) a) $\boldsymbol{U_1}=U_0+2=4+2\mathbf{=6}$; $\boldsymbol{U_2}=U_1+2\mathbf{=8}$ et $\boldsymbol{U_3}=U_2+2\mathbf{=10}$.

b) Comme $U_{n+1}=U_n+2$ pour tout entier naturel *n*, alors (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0=4$ et de raison $r=2$.
On en déduit que, **pour tout entier naturel *p*,** $\boldsymbol{U_p}=U_0+pr\ \mathbf{=4+2}\boldsymbol{p}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{U_{21}}=4+2\times 21\mathbf{=46}$.

3) On a fait fonctionné l'algorithme pour $N=20$ et on a obtenu $S=504$.
Si on fait fonctionné l'algorithme pour $N=21$, on obtiendra : $U=4+2\times 21=46$ et, par suite, $\boldsymbol{S}=504+46\mathbf{=550}$.

4) Soit S_N la valeur affichée pour S lorsque l'on fait fonctionner l'algorithme pour un entier naturel N quelconque.
$S_0=4$; $S_1=S_0+U_1$; $S_2=S_1+U_2=S_0+U_1+U_2$.
Il semble alors que $S_N=S_0+U_1+U_2+...+U_N$, pour tout N entier naturel non nul. Appelons $\mathcal{P}(N)$ cette proposition.

Initialisation : On a vu ci-dessus que $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit $N\geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(N)$ soit vraie. Vérifions si $\mathcal{P}(N+1)$ l'est également.
$S_{N+1}=(S_0+U_1+U_2+...+U_N)+U_{N+1}=S_0+U_1+U_2+...+U_N+U_{N+1}$. Donc $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie.

Conclusion : On a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie et que pour tout $N\geq 1$, $\mathcal{P}(N)\Rightarrow\mathcal{P}(N+1)$.
Du principe de raisonnement par récurrence, pour tout N entier naturel non nul,
$S_N=S_0+U_1+U_2+...+U_N$.

Or $U_1+U_2+...+U_N$ est la somme des termes consécutifs de la suite (U_n), alors
$$U_1+U_2+...+U_N=N\times\frac{U_1+U_N}{2}=N\times\frac{6+4+2N}{2}=N\times(5+N)=5N+N^2.$$
Par conséquent, **pour tout entier naturel *N*,** $\boldsymbol{S_N}\mathbf{=4+5}\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathbf{2}}$.

3. Exercice 3

1) $\boldsymbol{T}(\mathbf{0}) = 40\mathrm{e}^0 + 20 = 40\times1+20 = \mathbf{60}$.

2) a) Soit x un réel positif. On a : $T = 40\mathrm{e}^u + 20$ avec $u(x) = -0{,}1x$.

Alors $T' = 40\left(\mathrm{e}^u\right)' = 40u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = -0{,}1$.

Par conséquent, **pour tout $\boldsymbol{x}$ de $[\mathbf{0}\,;+\infty[$, $\boldsymbol{T'}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{4e}^{-0{,}1x}$** .

b) Comme $-4 < 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}1x} > 0$ (pour tout réel x), alors $T'(x) < 0$ pour tout réel x positif.

Par conséquent, **la fonction $\boldsymbol{T}$ est strictement décroissante sur $[\mathbf{0}\,;+\infty[$** .

3)
$$\begin{aligned}
T(x) = 30 &\Leftrightarrow 40\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 20 = 30 \\
&\Leftrightarrow 40\mathrm{e}^{-0{,}1x} = 10 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}1x} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow -0{,}1x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow -0{,}1x = -\ln(4) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{0{,}1} = \frac{2\ln(2)}{\frac{1}{10}} = 20\ln(2)
\end{aligned}$$

Par conséquent, **l'équation $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{30}$ admet pour solution $\mathbf{20\,ln(2)}$ dans $[\mathbf{0}\,;+\infty[$** .

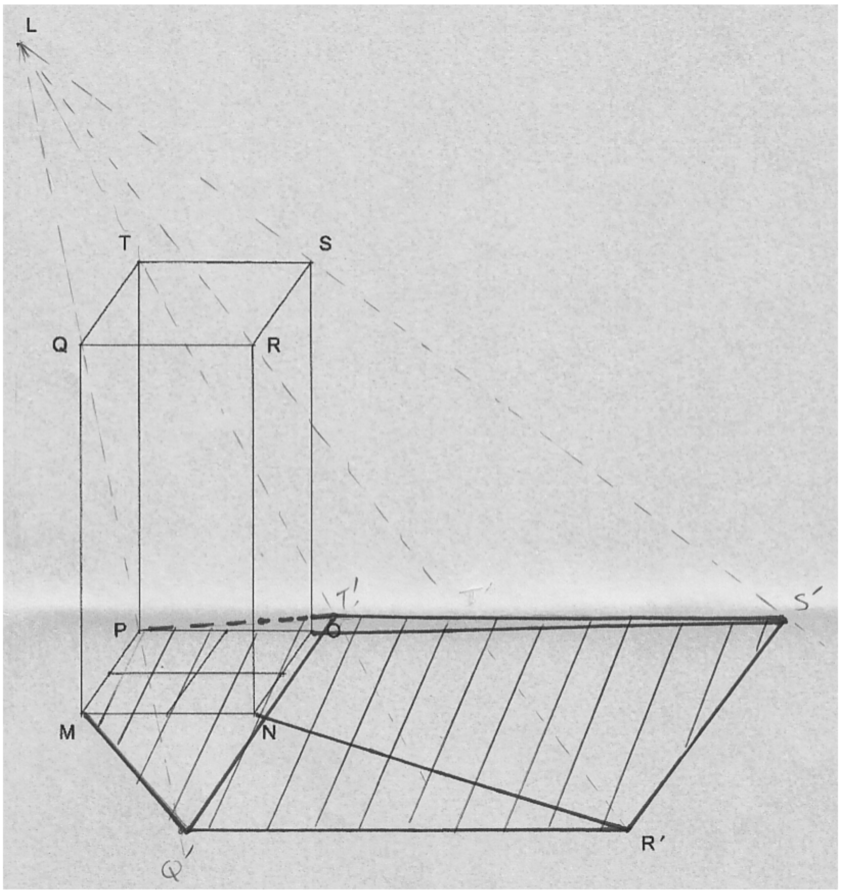
4) Comme la machine se déclenche lorsque la température de l'eau atteint 60°Celsius et qu'elle cesse de fonctionner lorsqu'elle atteint 30°Celsius, alors on est amené à résoudre l'équation $T(x) = 30$ où x sera le temps en secondes.

D'après la question précédente, $x = 20\ln(2) \approx 14$.

Par conséquent, **la durée de la phase de refroidissement du circuit est d'environ 14 secondes**.

4. Exercice 4

1)



2)