

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 9

Tangentes communes à deux courbes

Pour le 28 janvier 2008

1) a) Voir figure.

b) On peut conjecturer que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont une tangente commune pour $a = -2$ et $b = -0,5$.

2) *Justification mathématique de la conjecture.*

a) (T_1) a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Or $f'(x) = 2x$, pour tout réel x .

Alors $f'(a) = 2a$. D'où : $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$.

Donc (T_1) a pour équation $y = 2ax - a^2$.

(T_2) a pour équation $y = g'(b)(x - b) + g(b)$.

Or $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pour tout réel x différent de 0. Alors $g'(b) = -\frac{1}{b^2}$.

D'où : $y = -\frac{1}{b^2}(x - b) + \frac{1}{b} = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$.

Donc (T_2) a pour équation $y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$.

b) D'après la question précédente, (T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, ces droites ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine, c'est-à-dire **si, et seulement si, $2a = -\frac{1}{b^2}$ et $-a^2 = \frac{2}{b}$** .

$$c) \begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 = \frac{2}{b} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = -\frac{1}{2b^2} \\ -\left(-\frac{1}{2b^2}\right)^2 = \frac{2}{b} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } \begin{cases} a = -\frac{1}{2b^2} \\ -\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b} \end{cases}.$$

Or $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow 8b^4 = -b \Leftrightarrow b(8b^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow 8b^3 + 1 = 0$ car $b \neq 0$; d'où :

$$-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow b^3 = -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3.$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 = \frac{2}{b} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = -\frac{1}{2b^2} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Par conséquent, (T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, $a = -2$ et $b = -0,5$.

d) D'après la question précédente, on en déduit que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont une tangente commune.