CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6	
Second degré et optimisation	***Pour le 23 novembre 2007***

1) Figure GeoGebra.

2) a) Figure 1.
Il semble que $\mathcal{A}(x)$ **soit maximale lorsque M est le milieu du diamètre $[AB]$**.

b) Figure 2.
Il semble qu'il soit impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

c) Figure 3.
Il semble que les positions de M, pour lesquelles $\mathcal{A}(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$, sont telles que $x \in [0\ ;\ 0{,}64] \cup [3{,}64\ ;\ 4]$.

3) L'aire $\mathcal{A}(x)$ de la surface non colorée est définie sur $[0\ ;\ 4]$ par :

$$\mathcal{A}(x) = \pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{AM}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{MB}{2}\right)^2 = \pi \times (2)^2 - \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2.$$

D'où,

$$\mathcal{A}(x) = \pi \times \left(4 - \frac{x^2}{4} - \frac{16-8x+x^2}{4}\right) = \pi \times \left(\frac{16-16+8x-2x^2}{4}\right) = \pi \times \left(\frac{8x-2x^2}{4}\right) = \pi \times \left(\frac{4x-x^2}{2}\right)$$

Par conséquent, **pour tout réel x de $[0\ ;\ 4]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$**.

4) $\mathcal{A}(x)$ est un trinôme du second degré. Comme $a = -\frac{\pi}{2}$ (le coefficient du x^2 est négatif), alors la représentation graphique de $\mathcal{A}$ est une parabole ayant « les branches vers le bas », et le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Or $-\frac{b}{2a} = -\frac{2\pi}{-\pi} = 2$ et $-\frac{\Delta}{4a} = 2\pi$.
D'où :

x	0		2		4
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2π	$\searrow$	0

Par conséquent, $\mathcal{A}$ admet un maximum 2π atteint en $x = 2$.
Par conséquent, **la position de M pour laquelle $\mathcal{A}(x)$ est maximale est donc le milieu du diamètre $[AB]$**.

5) $\mathcal{A}(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que : $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right) > \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2$.

C. Lainé

Or $\dfrac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right) > \pi\times\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\dfrac{4-x}{2}\right)^2$ équivaut à $x^2-4x+4<0$, c'est-à-dire à $\left(x-2\right)^2<0$; ce qui est impossible.
Par conséquent, **il est impossible de trouver une position de M vérifiant le problème**.

6) $\mathcal{A}(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que $\dfrac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)\leq\dfrac{1}{2}\left[\pi\times\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\dfrac{4-x}{2}\right)^2\right]$.

Or $\dfrac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)\leq\dfrac{1}{2}\left[\pi\times\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\dfrac{4-x}{2}\right)^2\right]$ équivaut à $3x^2-12x+8\geq 0$.

Cherchons le signe de $3x^2-12x+8$.
$\Delta=\left(-12\right)^2-4\times3\times8=144-96=48$; comme $\Delta > 0$, alors le trinôme $3x^2-12x+8$ admet deux solutions : $x_1=\dfrac{12-\sqrt{48}}{6}=\dfrac{12-4\sqrt{3}}{6}=2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ et
$x_2=\dfrac{12+\sqrt{48}}{6}=\dfrac{12+4\sqrt{3}}{6}=2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.
On obtient alors le signe de l'expression $3x^2-12x+8$ (positif à l'extérieur des racines) :

x	0		$2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$		$2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$		4
$3x^2-12x+8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, **les positions de M, pour lesquelles $\mathcal{A}(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$, sont telles que $x\in\left[0\ ;\ 2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right]\cup\left[2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\ ;\ 4\right]$**.