

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 6

Second degré et optimisation

Pour le 23 novembre 2007

1) Figure GeoGebra.

2) a) Figure 1.

Il semble que $\mathcal{A}(x)$ soit maximale lorsque M est le milieu du diamètre $[AB]$.

b) Figure 2.

Il semble qu'il soit impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

c) Figure 3.

Il semble que les positions de M , pour lesquelles $\mathcal{A}(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$, sont telles que $x \in [0 ; 0,64] \cup [3,64 ; 4]$.

3) L'aire $\mathcal{A}(x)$ de la surface non colorée est définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$\mathcal{A}(x) = \pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{AM}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{MB}{2}\right)^2 = \pi \times (2)^2 - \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2.$$

D'où,

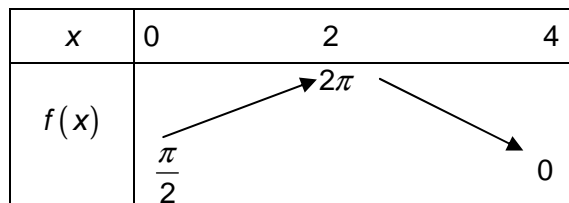
$$\mathcal{A}(x) = \pi \times \left(4 - \frac{x^2}{4} - \frac{16 - 8x + x^2}{4}\right) = \pi \times \left(\frac{16 - 16 + 8x - 2x^2}{4}\right) = \pi \times \left(\frac{8x - 2x^2}{4}\right) = \pi \times \left(\frac{4x - x^2}{2}\right)$$

Par conséquent, pour tout réel x de $[0 ; 4]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)$.

4) $\mathcal{A}(x)$ est un trinôme du second degré. Comme $a = -\frac{\pi}{2}$ (le coefficient du x^2 est négatif), alors la représentation graphique de \mathcal{A} est une parabole ayant « les branches vers le bas », et le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Or $-\frac{b}{2a} = -\frac{2\pi}{-\pi} = 2$ et $-\frac{\Delta}{4a} = 2\pi$.

D'où :



Par conséquent, \mathcal{A} admet un maximum 2π atteint en $x = 2$.

Par conséquent, la position de M pour laquelle $\mathcal{A}(x)$ est maximale est donc le milieu du diamètre $[AB]$.

5) $\mathcal{A}(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre

$[AM]$ et $[MB]$ signifie que : $\frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) > \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2$.

Or $\frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) > \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2$ équivaut à $x^2 - 4x + 4 < 0$, c'est-à-dire à $(x-2)^2 < 0$; ce qui est impossible.

Par conséquent, **il est impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.**

6) $\mathcal{A}(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$

signifie que $\frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) \leq \frac{1}{2} \left[\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 \right]$.

Or $\frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) \leq \frac{1}{2} \left[\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 \right]$ équivaut à $3x^2 - 12x + 8 \geq 0$.

Cherchons le signe de $3x^2 - 12x + 8$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 8 = 144 - 96 = 48$; comme $\Delta > 0$, alors le trinôme $3x^2 - 12x + 8$ admet

deux solutions : $x_1 = \frac{12 - \sqrt{48}}{6} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ et

$x_2 = \frac{12 + \sqrt{48}}{6} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{6} = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

On obtient alors le signe de l'expression $3x^2 - 12x + 8$ (positif à l'extérieur des racines) :

x	0	$2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$	$2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$	4
$3x^2 - 12x + 8$	+	0	-	0
		+	+	+

Par conséquent, **les positions de M , pour lesquelles $\mathcal{A}(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$, sont telles que**

$x \in \left[0 ; 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right] \cup \left[2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} ; 4\right]$.