CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 10	
Tangentes communes à deux courbes	***Pour le 7 janvier 2008***

1) a) Voir figure.

b) On peut conjecturer que **$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont deux tangentes communes** : l'une lorsque $a \simeq 1{,}5$ et $b \simeq 0{,}2$, l'autre lorsque $a \simeq -1{,}5$ et $b \simeq 4{,}7$.

2) *Justification mathématique de la conjecture.*

a) (T_1) a pour équation $y = \exp'(a)(x-a) + \exp(a) = e^a(x-a) + e^a$.
Donc **(T_1) a pour équation $e^a x - y + e^a(1-a) = 0$**.

(T_2) a pour équation $y = (\ln)'(b)(x-b) + \ln(b) = \dfrac{1}{b}(x-b) + \ln(b) = \dfrac{1}{b}x - 1 + \ln(b)$.

Donc **(T_2) a pour équation $\dfrac{1}{b}x - y + \ln(b) - 1 = 0$**.

b) D'après la question précédente, (T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, $e^a = \dfrac{1}{b}$ et $e^a(1-a) = \ln(b) - 1$.

Or $\begin{cases} e^a = \dfrac{1}{b} \\ e^a(1-a) = \ln(b) - 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b = \dfrac{1}{e^a} = e^{-a} \\ e^a(1-a) = \ln\left(e^{-a}\right) - 1 = -a - 1 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} b = e^{-a} \\ e^a = \dfrac{a+1}{a-1} \end{cases}$.

Par conséquent, **(T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, $b = e^{-a}$ et $e^{-a} = \dfrac{a-1}{a+1}$**.

c) La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R} - \{-1\}$ en tant que somme de deux fonctions :
$u : x \mapsto e^{-x}$ dérivable sur $\mathbf{R}$, et $v : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ dérivable sur $\mathbf{R} - \{-1\}$.

Soit x un réel différent de – 1. $h'(x) = -e^{-x} - \dfrac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x+1)^2} = -e^{-x} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Alors $h'(x) = -\left(e^{-x} + \dfrac{2}{(x+1)^2}\right)$ pour tout réel x différent de – 1.

Comme e^{-x} et $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ sont strictement positifs pour tout x de $\mathbf{R} - \{-1\}$, alors $h'(x) < 0$ pour tout réel x différent de – 1.
On en déduit que **la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$**.

d) • $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ (limite d'une fonction composée)

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$ (d'après la limite du quotient des monômes de plus haut degré). Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ (par somme des limites).

$\lim\limits_{x \to -1} (-x) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} e^X = e$, d'où $\lim\limits_{x \to -1} e^{-x} = e$ (limite d'une fonction composée)

De plus, $\lim\limits_{x \to -1} (x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(\dfrac{x-1}{x+1} \right) = +\infty$ (d'après le quotient des limites). Alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} h(x) = -\infty$ (par somme des limites).

Comme h est dérivable, donc continue, sur $\mathbf{R} - \{-1\}$, que h est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et que $h(]-\infty\ ;\ -1[) = \mathbf{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution a_1 dans $]-\infty\ ;\ -1[$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (limite d'une fonction composée)

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ (d'après la limite du quotient des monômes de plus haut degré). Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -1$ (par somme des limites).

$\lim\limits_{x \to -1} (-x) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} e^X = e$, d'où $\lim\limits_{x \to -1} e^{-x} = e$ (limite d'une fonction composée)

De plus, $\lim\limits_{x \to -1} (x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x+1) = 0^+$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(\dfrac{x-1}{x+1} \right) = -\infty$ (d'après le quotient des limites). Alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} h(x) = +\infty$ (par somme des limites).

Comme h est dérivable, donc continue, sur $\mathbf{R} - \{-1\}$, que h est strictement décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et que $h(]-1\ ;\ +\infty[) =]-1\ ;\ +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution a_2 dans $]-1\ ;\ +\infty[$.

Par conséquent, **l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions a_1 et a_2**.

e)

x	h(x)
-2	4,3890561
-1,9	3,46367222
-1,8	2,54964746
-1,7	1,61680453
-1,6	0,61969909
-1,5	-0,51831093
-1,4	-1,94480003
-1,3	-3,99737
-1,2	-7,67988308
-1,1	-17,995834

x	h(x)
1	0,36787944
1,1	0,28525204
1,2	0,21028512
1,3	0,14209701
1,4	0,0799303
1,5	0,02313016
1,6	-0,02887271
1,7	-0,07657574
1,8	-0,1204154
1,9	-0,16077621

Par conséquent, $\mathbf{-1,6 < a_1 < -1,5}$, et dans ce cas, $\mathbf{0,2 < b_1 < 0,23}$, et, $\mathbf{1,5 < a_2 < 1,6}$, et dans ce cas, $\mathbf{4,48 < b_2 < 4,96}$.

f) D'après la question précédente, on en déduit que **$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont deux tangentes communes**.