

## DEVOIR MAISON N° 10

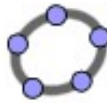

**Tangentes communes à deux courbes**

**Pour le 7 janvier 2008**

$\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont les courbes représentatives des fonctions  $\exp$  et  $\ln$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

L'objectif du problème est de trouver, si elles existent, les tangentes communes à ces deux courbes.

1) a) Afin de pouvoir conjecturer la solution, réaliser une figure à l'aide du logiciel GeoGebra. Voici le protocole de construction

Étapes	
➤ Construire ces courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$	Dans le champ <input style="border: 1px solid gray; padding: 2px;" type="text" value="Saisie:"/> , entrer les expressions des deux fonctions (écrire $f(x)$ pour la fonction $\exp$ et $g(x)$ pour la fonction $\ln$ ).
➤ Construire deux curseurs, que vous nommerez $a$ et $b$	Utiliser l'icône :  Prendre un incrément égal à 0.01
➤ Construire la tangente $(T_1)$ à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse $a$ .	Dans le champ <input style="border: 1px solid gray; padding: 2px;" type="text" value="Saisie:"/> , écrire $T_1 = \text{tangente}[a, f]$ <sup>1</sup>
➤ Construire la tangente $(T_2)$ à $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse $b$ .	Adapter la procédure précédente

b) Émettre la conjecture.

2) *Justification mathématique de la conjecture.*

a) Écrire une équation de  $(T_1)$  et une équation de  $(T_2)$  sous la forme  $ux + vy + w = 0$  où  $u, v$  et  $w$  sont des réels.

b) Montrer alors que  $(T_1)$  et  $(T_2)$  sont confondues si, et seulement si,  $b = e^{-a}$  et

$$e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}.$$

c) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbf{R} - \{-1\}$  par  $h(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}$ .

Étudier les variations de  $h$ .

d) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $a_1$  et  $a_2$ .

e) Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $a_1$  et  $a_2$ , puis des valeurs correspondantes  $b_1$  et  $b_2$ .

f) Répondre au problème posé.

<sup>1</sup> En fait, il faut faire attention à la notation que donne le logiciel à votre courbe