Exercice 1

Partie A

1) $f(0)$ est égal à 3.

2) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A.

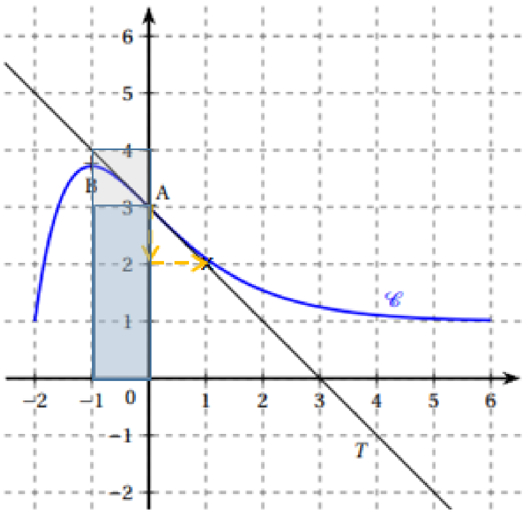
Donc $f'(0)=\dfrac{-1}{1}=-1$.

La tangente T a pour équation $y=-x+3$.

3) Comme f est croissante sur $[-2\,;-1]$ et décroissante sur $[-1\,;6]$, alors f' est positive sur $[-2\,;-1]$ et négative sur $[-1\,;6]$.

4) f est convexe sur $[-2\,;0]$ et concave sur $[0\,;6]$.

5) $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[-1\,;0]$. Cette aire est encadrée par les aires des deux rectangles (voir figure). Donc $3 \le \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \le 4$.



Partie B

1) $f(6)=8e^{-6}+1\approx 1{,}02$

2) On a : $f=ue^{v}+1$ avec $u(x)=x+2$ et $v(x)=-x$.

Alors $f'=u'e^{v}+uv'e^{v}+0$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=-1$.

Donc $f'(x)=1\times e^{-x}+(x+2)\times(-1)e^{-x}=(1+(x+2)\times(-1))e^{-x}=(1-x-2)e^{-x}$

Par conséquent, $f'(x)=(-x-1)e^{-x}$.

3) Comme $e^{-x}>0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x-1$.

Or $-x-1=0$ équivaut à $x=-1$

x	-2		-1		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$e+1$	$\searrow$	$8e^{-6}+1$

C. Lainé

4) a) Une primitive de f sur $[-2\ ;\ 6]$ est définie par $F(x)=(-x-3)\times e^{-x}$.

b) La valeur moyenne de f sur $[-1\ ;\ 0]$ est égale à $\frac{1}{0-(-1)}\times\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Or $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-1}^{0}=(-3)e^{0}-(-2)e^{1}=2e-3$.

Donc la valeur moyenne de f sur $[-1\ ;\ 0]$ est égale à $2e-3$, soit environ 2,44.

<u>Exercice 2</u>

1) Comme la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 € lorsqu'elle vend 1 000 voitures et que la recette $r(x)$ est exprimée en dizaine de milliers d'euros pour la vente de x milliers de voitures, alors , alors $r(1)=\frac{70\ 000}{10\ 000}=7$.

2) a) On a : $r=u+2v$ avec $u(x)=x+6$ et $v(x)=\ln(x)$.

D'où $r'=u'+2v'$ avec $u'(x)=1$ et $v(x)=\frac{1}{x}$.

Donc $r'(x)=1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}$.

b) Comme $x\in[1\ ;\ 5]$, alors $x+2>0$ et $x>0$. Par conséquent, $r'(x)>0$ pour tout x de $[1\ ;\ 5]$. On en déduit que la fonction r est strictement croissante sur $[1\ ;\ 5]$.

3) a) La fonction r est continue, car dérivable, et strictement croissante sur $[1\ ;\ 5]$.
$r(1)=1+6+2\ln(1)=7+0=7<10$ et $r(5)=5+6+2\ln(5)\approx 14>10$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $r(x)=10$ admet une unique solution α dans $[1\ ;\ 5]$.
D'après la calculatrice, $\alpha\approx 2{,}319$.

b) 100 000 € = 10 dizaines de milliers d'euros.
Comme r est strictement croissante sur $[1\ ;\ 5]$ et que $r(\alpha)=10$, alors $r(x)>10$ lorsque $x>\alpha$. L'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros lorsqu'elle vend à partir de 2 319 voitures télécommandées.

4) a) On a : $G=u\times v$ avec $u(x)=2x$ et $v(x)=\ln(x)-1$.

D'où $G'=u'v+uv'$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=\frac{1}{x}-0=\frac{1}{x}$.

Par suite, $G'(x)=2(\ln(x)-1)+2x\times\frac{1}{x}=2\ln(x)-2+2=2\ln(x)=g(x)$.

Par conséquent, G est une primitive de g sur $[1\ ;\ 5]$.

b) On en déduit qu'une primitive de la fonction r sur $[1\ ;\ 5]$ est la fonction R définie par
$R(x)=\frac{1}{2}x^{2}+6x+G(x)=\frac{1}{2}x^{2}+6x+2x(\ln(x)-1)$.

c) La valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées, est égale à : $\frac{1}{4-2}\times\int_{2}^{4} r(x)dx=\frac{1}{2}\times\int_{2}^{4} r(x)dx=\frac{1}{2}\times\left[R(x)\right]_{2}^{4}$

$$\left[R(x)\right]_{2}^{4}=R(4)-R(2)=\left(8+24+8(\ln(4)-1)\right)-\left(2+12+4(\ln(2)-1)\right)$$
$$=32+8\ln(4)-8-14-4\ln(2)+4=14+16\ln(2)-4\ln(2)=14+12\ln(2)\approx 22{,}3178$$

Or $\frac{1}{2} \times 22{,}3178 \times 10000 = 111589 \approx 111590$; donc la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées, est égale à environ 111 590 euros.