Classe terminale de la série économique et sociale

Orientations générales

Les enjeux de la classe terminale

La classe terminale marque la fin des études secondaires et, à travers l'examen du baccalauréat, ouvre la voie aux études supérieures ; ces deux aspects marquent profondément les pratiques des enseignants et des élèves. Ils entraînent des contraintes inévitables et des points de vue divers, avec lesquels il faut composer.

Un enseignement cohérent sur le cycle terminal

Les deux programmes du cycle terminal ES ne peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. C'est sur les deux ans que la plupart des notions sont à construire et à installer. Un travail essentiel a été fait en première : on y a introduit des concepts fondamentaux (probabilités, dérivation, suites pour la partie obligatoire ; calcul matriciel et géométrie dans l'espace pour la partie optionnelle). On revient sur ces concepts en terminale et on les met en œuvre dans des contextes plus larges : ainsi du concept de dérivée qui s'enrichit de celui de primitive. Cette vision du programme sur les deux années peut aider chaque enseignant dans le choix des exercices ou problèmes à traiter prioritairement avec ses élèves.
On aura le souci d'avancer dans la découverte des nouveaux concepts malgré la moindre technicité calculatoire que l'on peut observer chez bon nombre d'élèves. Cependant, la maîtrise du calcul élémentaire reste un objectif de base de l'enseignement des mathématiques et c'est cette maîtrise qui donne l'aisance indispensable à la bonne compréhension et au traitement efficace d'un problème ; elle libère la pensée et procure confiance en soi. La mémorisation de certaines formules est donc nécessaire au développement de l'intelligence du calcul : ainsi, comment aurait-on l'idée de retrouver dans une expression la forme $a^2 - b^2$ pour la factoriser si on ne connaît pas la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$?
L'acquisition de réflexes doit cependant être reliée à la compréhension du calcul et répondre à un besoin avéré, y compris sur le long terme. La compréhension des méthodes importe d'autant plus qu'à un certain niveau d'études (et peut-être dans un futur proche pour l'enseignement secondaire), les outils de calcul formel permettent d'aborder des situations calculatoires demandant une plus grande technicité ou de déléguer à la machine la réalisation de tâches techniques longues. Dans l'immédiat, les éventuels manques techniques ne doivent pas empêcher de progresser dans l'étude d'objets nouveaux ; cette étude peut au contraire inciter à combler ces manques.

Exemples

Comme il est dit plus bas, l'entraînement à l'étude de fonctions permet d'acquérir de nouveaux outils de lecture de l'information. On est alors amené à proposer aux élèves des exercices plus ou moins élémentaires sur les fonctions ; on s'interrogera à chaque fois sur l'objectif visé.
1) Soient g et h les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$.
L'étude de f met en œuvre des calculs de limites, une recherche d'asymptote, un calcul de dérivée (puis une recherche du signe de cette dérivée grâce à l'étude d'une fonction auxiliaire), un calcul de valeurs, etc. L'étude complète d'une telle fonction peut avoir sa place lors d'une recherche commune guidée ou dans le cadre d'un devoir à la maison : chaque élève a alors la possibilité de garder une vision globale

de l'étude en cours. On peut, par contre, s'interroger sur sa place dans le cadre d'un devoir surveillé, en raison de l'accumulation de difficultés calculatoires.
L'étude de g et h, facile à motiver par la recherche du comportement du produit et de la somme de deux fonctions bien connues, évite les pièges de calculs compliqués et trouve toute sa place lors d'une évaluation.

Formation générale et/ou préparation à l'examen

L'enseignement de la classe terminale ne se réduit pas à la préparation de l'examen du baccalauréat : nous le rappelons ici avec force. L'objectif est la formation des élèves : une formation aussi complète et solide que possible, dans un cadre établi par le législateur et préparant l'avenir tant de l'individu qui reçoit cette formation que de la société qui l'a définie. De nombreux aspects de cette formation sont difficiles à prendre en compte lors de l'examen final du baccalauréat ; ils ne sont pas pour autant à négliger.
Dans la pratique, l'examen du baccalauréat motive fortement un grand nombre d'élèves en donnant une échéance visible à leur travail scolaire. Il paraît donc judicieux, en dépit de ses aspects inévitablement codifiés, d'en user comme d'un levier pour le travail intellectuel. L'art de l'enseignant reste, comme par le passé, de résoudre des oppositions, de parfois contraindre pour ensuite convaincre ou tout au moins obtenir l'adhésion, de conjuguer au mieux l'entraînement à une épreuve clairement identifiée et le développement harmonieux de capacités intellectuelles.
« Faire » des problèmes de baccalauréat demeure un entraînement naturel, qu'on ne saurait éliminer ; travailler sur des annales permet de se situer par rapport à cette épreuve. Les contraintes de l'examen national conduisent souvent à des énoncés amputés de tout aspect heuristique : ces énoncés n'aident pas à comprendre le sens des mathématiques. Durant l'année, on n'hésitera pas à en réécrire certains pour en relever l'intérêt mathématique.

Quel enseignement mathématique dans la série ES ?

Deux orientations essentielles sont fixées par le programme à l'enseignement des mathématiques en série ES : « entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement » et « initiation à la pratique d'une démarche scientifique globale ».

Entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement

Savoir lire l'information suppose de maîtriser quelques outils de base : les élèves doivent connaître ces outils, comprendre leur pertinence et leur efficacité pour répondre aux questions posées. La plupart des notions au programme relèvent de cette ambition : calcul intégral et nouvelles fonctions, ajustement linéaire par moindres carrés, lois de probabilité et conditionnement, graphes et suites… toutes ces notions permettront aux élèves de cette série d'aborder une lecture puis un traitement scientifique de l'information à laquelle ils seront par la suite confrontés.
Il ne s'agit pas, en terminale, de laisser les élèves seuls face à une information brute ; les questions à poser puis l'interprétation des réponses relèvent le plus souvent de domaines extérieurs aux mathématiques : on pourra sur ce sujet mener avec profit un travail conjoint avec d'autres disciplines (sciences économiques et sociales, histoire et géographie en particulier). En l'absence d'un tel travail, on en restera à un questionnement de type mathématique.
L'exemple que l'on trouvera plus loin relatif au calcul de l'impôt relève d'une autre problématique : l'information de départ est donnée en termes mathématiques ; le professeur de mathématiques est donc tout à fait dans son rôle en aidant les élèves à décoder et comprendre cette information.

Initiation à la pratique d'une démarche scientifique

De nombreux éléments participent à la définition de ce que l'on appelle « une démarche scientifique ». On mettra plus particulièrement en avant les trois aspects suivants :

Expérimenter

Contrairement à une opinion fortement répandue, les mathématiques comportent une dimension expérimentale qu'il convient de valoriser auprès des élèves. Cette expérimentation sera avant tout graphique et numérique. Elle pourra précéder la mise en place de certains résultats.

> Ainsi, l'observation du graphe de la fonction logarithme, avec sa pente de moins en moins forte quand x croît, amène à comparer $\ln x$ et $\sqrt{x}$; d'où l'on déduit la règle de comparaison de $\ln x$ et x.

Elle pourra aider à retrouver certains résultats.

> Ainsi de la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en 0 : une expérimentation numérique avec $x = 10^{-6}$ par exemple donne la valeur $-6\ln 10 \times 10^6$. Cela suggère une limite égale à $-\infty$; la mise sous la forme $\ln x \times \frac{1}{x}$ permet ensuite de conclure avec les règles opératoires du cours.

On incitera donc les élèves à se confronter régulièrement au numérique : ils y acquerront une habitude des nombres et des ordres de grandeur précieuse pour la suite de leurs études, ainsi qu'un support à l'abstraction indispensable pour beaucoup d'entre eux.

On donnera à ces phases expérimentales la place qui leur revient. Expérimenter rend plausible un résultat, mais ne le démontre pas : on peut conjecturer que la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (dont on ne sait au départ si elle existe) est finie. Cette distinction entre le plausible et le démontré est fondamentale, mais elle ne prend tout son sens qu'avec un exemple où une expérimentation numérique rend plausible un résultat faux.

Démontrer

Il importe que les élèves aient compris le rôle caractéristique de la démonstration en mathématiques : on repèrera quelques endroits du cours où ce rôle sera mis en avant (propriétés du logarithme ou de l'exponentielle par exemple). Mais on n'oubliera pas que la démonstration est toujours un compromis ; le souci de démontrer le cédera parfois devant le souci d'expliquer.

> La mise en place de la relation fonctionnelle de la fonction logarithme peut se faire de façon analytique ou de façon géométrique : cette seconde méthode, évoquée plus bas, amène à privilégier un point de vue explicatif particulièrement convaincant; il serait dommage de le refuser parce qu'il ne se prête pas à une formalisation rigoureuse à ce niveau. Une fois cette relation établie, on peut alors démontrer avec rigueur les propriétés qui s'en déduisent.
> On expliquera de même le lien entre la moyenne empirique et l'espérance mathématique, sans se préoccuper du mode de convergence en jeu : quand les f_i « tendent » vers les p_i, la moyenne $\sum_i f_i x_i$ « tend » vers l'espérance $\sum_i p_i x_i$.

Communiquer

Il s'agit ici avant tout de rendre les élèves capables de produire un texte clair, précis et logiquement articulé. Ils s'entraîneront à contrôler la cohérence et la logique de leur propos : corriger une contradiction flagrante (par exemple entre une flèche montante dans un tableau de variations et une limite égale à $-\infty$), repérer l'argument fondamental ou l'étape clé d'un raisonnement sont ici des compétences fondamentales.
Le travail fait en mathématiques aide à la maîtrise de la langue française et on évitera les lignes de calcul sans aucune explication ; on entraînera les élèves à user correctement de liens de langage *(car, or, d'où, donc, on en déduit que, il s'ensuit que…)* qui éclairent la logique du discours tenu.

Organisation du travail des élèves

Le programme n'impose aucune progression pédagogique. Il n'est pas écrit de façon linéaire : on ne peut donc pas bâtir un cours en partant de la première ligne du programme et en continuant jusqu'à la dernière.
Des indications globales de durée sont données pour chacun des deux grands titres : environ 18 semaines pour l'analyse et 12 semaines pour la statistique et les probabilités.
Rappelons, comme cela a déjà été fait dans le document de première, que l'efficacité de l'enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière ou en travail personnel : les autres paragraphes de ce document, ainsi que le paragraphe 3 du programme de première, donnent des pistes pour adapter des activités à ces divers temps.

Analyse

Fonctions numériques

Les fonctions que les élèves de terminale ES sont susceptibles de rencontrer sont continues par morceaux, et même, le plus souvent, continues. L'aspect graphique est à privilégier puisque l'une des idées qui président à l'élaboration du programme est « l'entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement », et que l'interprétation raisonnée d'un graphique fait partie de cet entraînement. On pourra donc s'appuyer sur une conception intuitive de la continuité, comme celle qui consiste à dire qu'une fonction est continue quand on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Cela étant, il est souhaitable de faire comprendre aux élèves que cette approche atteint très rapidement ses limites : d'une part, le tracé du graphe d'une fonction est *en fait* impraticable, sinon pour des fonctions très simples et sur des intervalles assez petits (comment envisager, par exemple, un graphe lisible de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-20, 20]$?) ; d'autre part, les fonctions de plusieurs variables (que de nombreux élèves utiliseront dans la suite de leurs études) ne se prêtent absolument pas à cette approche puisque leur graphe se trouve dans un espace de dimension supérieure à deux. Ces obstacles, sur lesquels il ne faut pas trop insister, permettront d'attirer l'attention sur le fait que cette description graphique de la continuité n'est pas une définition mathématique et qu'on aurait besoin de mieux pour aller plus loin.
Les élèves peuvent éprouver des difficultés à saisir la définition d'une fonction lorsque celle-ci possède une expression analytique différente sur divers intervalles. Il est pourtant essentiel qu'ils comprennent que ce peut être le cas des fonctions les plus concrètes.

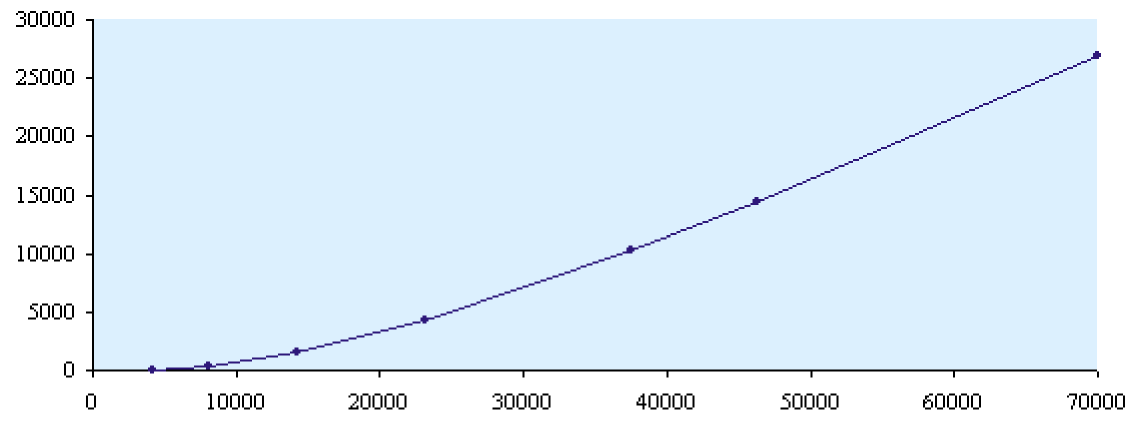
Exemple : L'impôt sur le revenu en France, en 2001

Une personne seule, sans autre revenu que son salaire et ne disposant pas d'éléments menant à une réduction d'impôts, peut calculer l'impôt sur son revenu annuel net imposable à partir du tableau suivant.

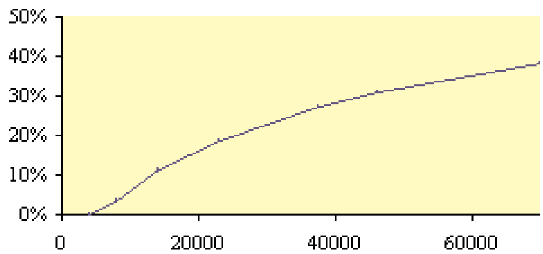
Tranche de revenu (en euros)	Impôts (s = salaire annuel)
]0 ; 4121]	0
]4121 ; 8104]	0,075 s - 309,08
]8104 ; 14264]	0,21 s - 1 403,12
]14264 ; 23096]	0,31 s - 2 829,52
]23096 ; 37579]	0,41 s - 5 139,12
]37579 ; 46343]	0,4675 s - 7 299,91
>46343	0,5275 s - 10 080,49

Les questions ci-dessous peuvent être posées aux élèves afin de les amener à comprendre ce tableau.
1) Est-il juste de dire, pour un salaire annuel de 18 000 €, que les impôts se décomposent ainsi :
Il n'y a pas d'impôts sur les premiers 4 121 €, l'impôt est de 7,5 % sur les 3 983 € suivants, puis de 21 % sur les 6 160 € suivants, puis de 31 % sur le reste.
2) On propose à quelqu'un gagnant annuellement 46 000 € une augmentation de son salaire annuel de 500 €. De quelle augmentation bénéficiera-t-il après déduction de l'impôt ?

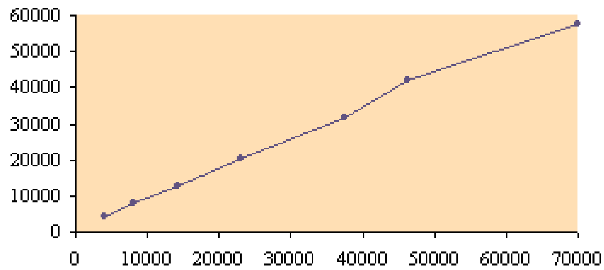
On appelle taux marginal d'imposition, à un niveau s de salaire, l'augmentation d'impôt due à une augmentation de 1 € du salaire. Déterminer la fonction qui à un salaire s associe le taux marginal.
3) Quel est le plus petit salaire tel que le pourcentage du salaire prélevé par l'impôt sur le revenu total soit supérieur à 30 % ? Ce pourcentage peut-il dépasser 50 % ?
4) Dupond dit à Dupont :
« Mon salaire est supérieur au tien, mais après déduction des impôts, je gagne finalement moins. »
Réponse de Dupont : « C'est impossible, le salaire impôt déduit est une fonction croissante du salaire initial. » Qu'en pensez-vous ? (On pourra définir la fonction g qui à un salaire mensuel s fait correspondre le salaire qui reste après déduction des impôts et tracer sa courbe représentative pour s compris entre 0 et 70 000 €.)
5) Tracer la courbe donnant le pourcentage du salaire qui est donné aux impôts, pour un salaire annuel entre 0 et 30 000 €.
6) Soit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4121\ldots$, $\alpha_7 = 46343$ et $\alpha_8 = 10^{99}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}075\ldots$, $t_7 = 0{,}5275$ et $d_k = t_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$. La formule suivante donnant l'impôt d payé pour un salaire s situé dans la tranche $T_i =]\,\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ est-elle correcte ?
$d = t_i(s - \alpha_i) + d_1 + \ldots + d_{i-1}$



impôt en fonction du revenu net imposable



variation du taux global d'imposition en fonction du revenu net imposable



revenu impôt déduit en fonction du revenu net imposable

Limites

Le concept de limite pourra lui aussi être abordé de façon intuitive et expérimentale, par l'utilisation de la calculatrice ou du tableur. Il est cependant important que les élèves comprennent la motivation essentielle du concept à ce niveau, à savoir la définition de la dérivée en un point comme limite des accroissements moyens et son interprétation géométrique qui fait apparaître la tangente comme « limite » des sécantes. Il est clair que les élèves seront amenés à étudier des fonctions à l'aide de leur tableau de variation, et il faut qu'ils comprennent alors ce qu'ils font, et pourquoi. L'accroissement relatif est une notion qu'ils doivent mettre en relation avec la notion familière de pourcentage ; pour éviter une confusion possible avec les fréquences et les probabilités, il convient de leur rappeler qu'un pourcentage peut être supérieur à 100 %, comme dans le cas d'une inflation galopante, et peut également être négatif.

Certaines situations pourront conduire à l'étude de limites non triviales.

Ainsi, un travail sur les intérêts composés amènera naturellement à étudier la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Cette étude pourra faire l'objet d'un travail expérimental sur la calculatrice et la démonstration du résultat illustre un usage de la dérivabilité des fonctions nouvelles que les élèves rencontrent.

D'un point de vue historique, il est vraisemblable qu'il s'agisse là de la plus ancienne estimation de limite sans motivation géométrique. En effet, lorsqu'un capital de C unités monétaires est investi à un taux x % par unité de temps, lorsque les intérêts sont capitalisés, c'est-à-dire incorporés au capital, n fois par unité de temps au taux $\frac{x}{n}$ dit « taux proportionnel », il vaut après une unité de temps $C\left(1+\frac{x}{100n}\right)^n$.

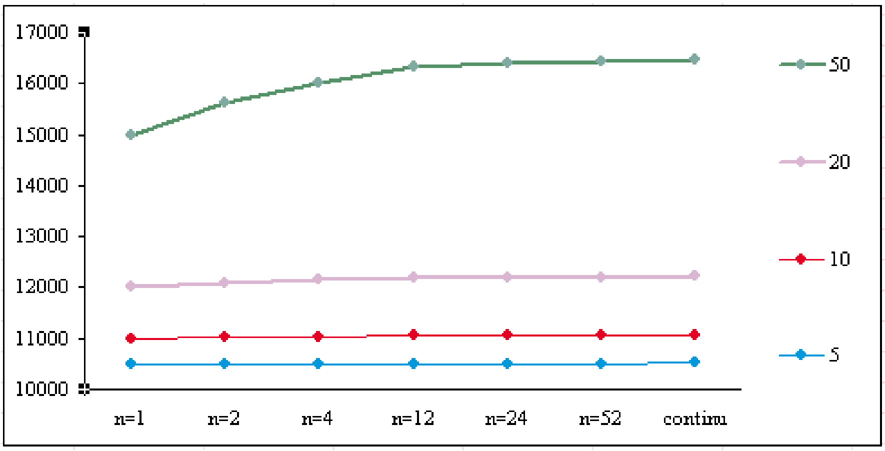
Une étude plus précise de la fonction ln permet de montrer que la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante, ce qui s'interprète simplement en termes d'intérêts composés par le fait qu'il est avantageux pour l'investisseur (ou le prêteur) de composer aussi souvent que possible les intérêts. Que se passe-t-il à la limite, c'est-à-dire en capitalisant « en continu » : le capital devient-il infini ? Les mathématiques sont là pour montrer que la valeur limite est $Ce^{\frac{x}{100}}$. Après t unités de temps, avec n capitalisations par unité de temps, le capital remboursé est $C_n(t) = C\left(1+\frac{x}{100n}\right)^{nt}$. Lorsque les intérêts sont continûment composés, c'est-à-dire capitalisés à chaque instant, on trouve un capital limite $C(t) = Ce^{\frac{tx}{100}}$.

La position du graphe de l'exponentielle au-dessus de sa tangente en 0 illustre le fait que les intérêts simples sont moins avantageux pour l'investisseur que les intérêts composés.

Illustration numérique : On place 10 000 € à un taux x pendant un an, capitalisés n fois ou « en continu ».

(Les valeurs choisies pour n correspondent à des capitalisations par semestre, par trimestre, par mois, par quinzaine – les 1 et 16 du mois – ou par semaine.)

	x=5	x=10	x=20	x=50
n=1	10500	11000	12000	15000
n=2	10506,25	11025	12100	15625
n=4	10509,45	11038,13	12155,06	16018,07
n=12	10511,62	11047,13	12193,91	16320,94
n=24	10512,16	11049,41	12203,91	16402,73
n=52	10512,46	11050,65	12209,34	16447,88
continu	10512,71	11051,71	12214,03	16487,21



Remarque – Il est vraisemblable (bien que les textes manquent) que les banquiers, autour de l'an 1600, ont été amenés à calculer des intérêts composés sur des périodes très courtes (quotidiennement, peut-être), mais ils n'ont très probablement pas été jusqu'à considérer une limite en notre sens.

Dans les calculs ci-dessus, on prend un taux $\frac{x}{n}$ lorsqu'on capitalise n fois par unités de temps. Mais aujourd'hui, dans les banques, on ne prend pas un taux $\frac{x}{n}$ mais un taux y, dit « taux actuariel » tel que :

$$\left(1+\frac{y}{100}\right)^n = 1+\frac{x}{100}, \text{ soit } y = 100\left(\left(1+\frac{x}{100}\right)^{1/n} - 1\right).$$

On pourra faire remarquer et illustrer graphiquement que pour des petites valeurs de x, le taux actuariel y est proche de $\frac{x}{n}$.

Dérivées et primitives

Il est essentiel que les élèves puissent calculer rapidement (et sans recours à un formulaire !) les dérivées des fonctions simples, en utilisant si nécessaire la dérivation de la composée de deux fonctions. Cela leur permettra de reconnaître des dérivées et par conséquent de calculer des primitives. Ils pourront aussi constater (sur des exemples comme $1/(1 + x^2)$ ou $1/x$) que la « primitivation » est moins simple que la dérivation, ce qui peut être une occasion d'insister sur le caractère non réversible de certains algorithmes (certes, on peut marcher ou courir à reculons, mais on le fait moins facilement).
Les fonctions logarithme et exponentielle sont les nouveaux objets les plus importants que les élèves découvrent en terminale ES. Il n'est pas immédiat de comprendre le rôle central du nombre e, et il est peut-être souhaitable d'évoquer π, l'autre constante numérique que les élèves connaissent depuis longtemps, et de leur faire comprendre que ces deux nombres s'imposent à nous.
La fonction logarithme pourra être introduite par intégration de la fonction $\frac{1}{x}$. Une méthode géométrique simple établit, sans recours à un changement de variable, que la primitive F de la fonction $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 satisfait la formule fondamentale $F(ab) = F(a) + F(b)$ pour tous les réels positifs a et b (voir le document d'accompagnement de l'option de première et terminale L, p 18-19). Cette propriété justifie l'importance accordée à cette fonction ; on la notera désormais ln. On montrera que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra par exemple, inspiré par une première représentation de ln, montrer que $\ln x$ est majorée par $\sqrt{x}$ puis que $\frac{\ln x}{x}$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{x}}$).
La fonction e^x est alors obtenue comme fonction réciproque de la fonction logarithme et la formule de dérivation des fonctions composées permet de calculer la dérivée de la fonction exponentielle. On définit alors, toujours par composition, l'expression $a^b = e^{b\ln(a)}$ où a est réel positif et b réel arbitraire, puis on remarque que cette fonction interpole les suites géométriques, ce qui justifie les notations du type $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ bien utiles dans les questions de dérivation et d'intégration. La limite de $\frac{\ln x}{x}$ à l'infini permet d'établir facilement les autres règles opératoires sur les limites.

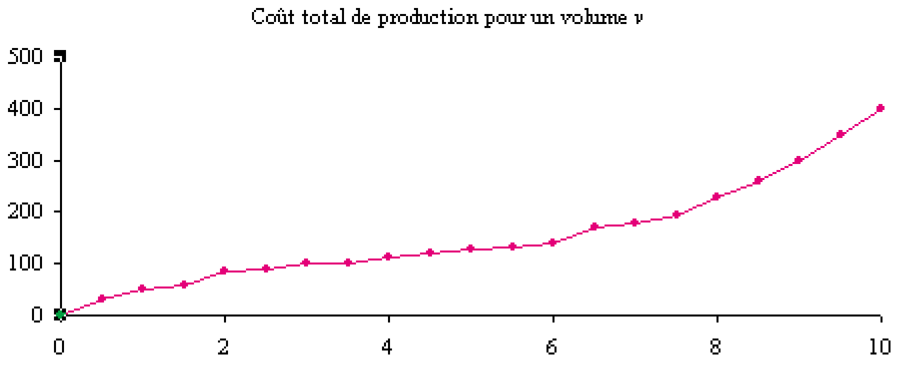
Les calculs d'aires, importants dans toute société agricole, sont aussi anciens que les mathématiques. Ils ont été théorisés par les mathématiciens grecs : ainsi, la quadrature du rectangle revient à l'obtention d'une racine carrée, cependant que la quadrature du cercle est équivalente à la construction de deux longueurs qui sont dans le rapport π. Il faut attendre le XVIIe siècle pour que le lien soit établi, par Newton et Leibniz, entre le calcul des tangentes et celui des aires, donc dans notre langage entre le calcul différentiel et le calcul intégral, et le XXe siècle pour que le rôle de l'intégrale en probabilités soit pleinement reconnu (la relation entre probabilités et intégrale n'est pas au programme de terminale ES). Mais les élèves sont en mesure de comprendre le lien entre l'intégration et le calcul des primitives qu'elle motive, et de voir sur des exemples que l'aire sous une courbe, tout comme la valeur d'une fonction, peut représenter une grandeur. Les fonctions à intégrer seront continues par morceaux et monotones. Le choix du programme consiste à se limiter aux fonctions positives dans les calculs d'aire (les exercices nécessitant de soustraire des aires ne devront donc pas poser de problèmes de signes). On pourra approcher l'aire limitée par le graphe d'une fonction croissante continue, l'axe des abscisses et deux droites verticales par la méthode des rectangles ; une expérimentation à la calculatrice ou sur tableur conduite sur un exemple (tel ln2) pourra illustrer cette approche.

Étant donnée une fonction croissante continue, on peut faire comprendre que f est la dérivée de la fonction aire en revenant à la définition de la dérivée et par encadrement entre deux rectangles. Cette fonction aire, notée à l'aide du symbole $\int$, est donc une primitive F de f, et on a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ pour cette primitive, et donc pour toute primitive de f puisqu'elles ne diffèrent que d'une constante additive. On peut alors énoncer (sans le démontrer) que ce résultat s'étend à toute fonction continue. Le calcul d'aires, intuitivement possible lorsqu'elles sont limitées par des graphes de fonctions continues, implique donc un résultat moins attendu, à savoir que toute fonction continue est une dérivée, et donc admet une primitive. On pourra faire remarquer que cette approche théorique ne fournit pas de méthode de calcul effectif de primitive, et qu'il s'agit là d'un vrai problème. Une fois établi le lien entre primitive et intégrale, la linéarité de l'opération de dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées) induit la linéarité de l'intégrale, qui n'est géométriquement claire que pour des fonctions en escalier.

Coût marginal

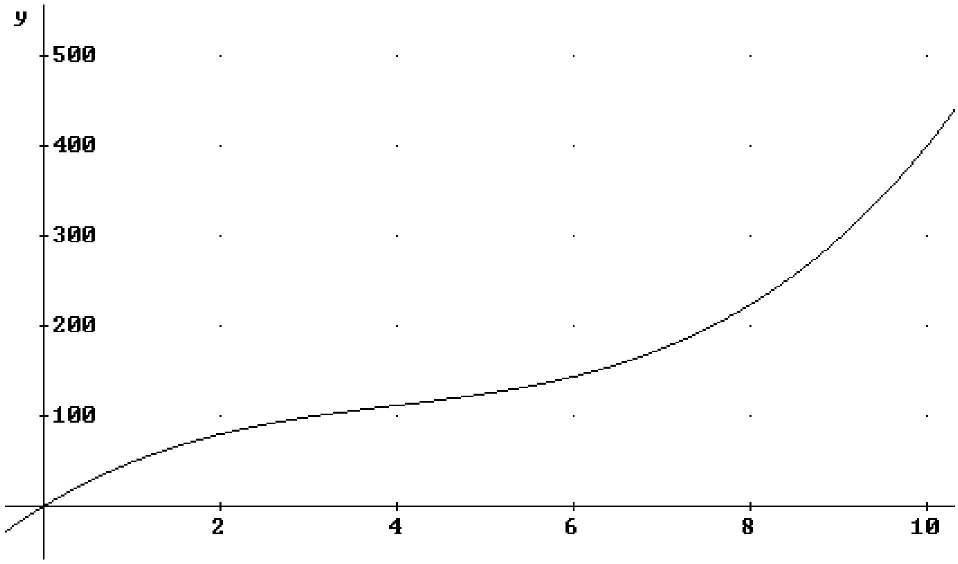
L'exemple ci-dessous illustre comment un concept (le coût marginal) utilisé dans le champ de l'économie peut s'appréhender à travers un concept mathématique (la dérivée).

Une industrie pharmaceutique possède une machine capable de produire au maximum 10 litres par jour d'un certain médicament présenté sous forme de sirop. Pour arriver à ce résultat, la machine doit tourner à son régime maximal 24 heures sur 24. Désignons par v le volume du médicament qu'elle produit effectivement, le nombre v étant fixé pour répondre à la demande des clients. On a évidemment $v \leqslant 10$.
Interrogeons-nous maintenant sur le coût de production du médicament : ce coût est une donnée importante pour fixer le prix de vente. Désignons par $C(v)$ le coût total de production du volume v. La figure ci-dessous donne un exemple d'une telle fonction.



Si le coût de production était proportionnel au volume produit, le graphe de la fonction serait une ligne droite passant par l'origine des coordonnées. Tel n'est pas le cas. En effet, la « pente » du graphe commence par diminuer au fur et à mesure que le volume augmente. Ceci veut dire que les premiers centilitres produits coûtent plus cher que les suivants. Un tel phénomène peut s'expliquer de diverses façons selon les cas : par exemple, la machine peut requérir une mise au point particulière au démarrage, mise au point qui intervient dans le coût des premiers centilitres produits, alors qu'une fois en régime, elle nécessite moins de présence humaine.
Par contre, au fur et à mesure qu'un plus grand volume de médicament est produit, la pente de la courbe s'accroît. Ceci veut dire que les derniers centilitres produits coûtent plus cher que les précédents. Ici aussi, diverses explications sont possibles : par exemple, pour dépasser une certaine production, il faut payer des techniciens au tarif des heures supplémentaires. Tant que le prix du centilitre produit diminue avec le volume total v, l'industriel a avantage à augmenter la production, puisque, à prix de vente constant, sa marge bénéficiaire augmente. Cependant, quand le prix du centilitre produit augmente, la marge bénéficiaire diminue. On voit pourquoi il est intéressant d'estimer, pour chaque valeur du volume produit, le prix que va coûter le centilitre supplémentaire produit au-delà de ce volume.
Pour cerner cette question mathématiquement, donnons-nous une expression algébrique de la fonction $C(v)$. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction C définie par :

$$C(v) = v^3 - 12v^2 + 60v, \text{ lorsque } 0 \leqslant v \leqslant 10.$$



Remarques

– De nombreuses fonctions de coût présentent cette allure : croissance rapide au début, plus lente ensuite et de nouveau croissance plus rapide. Les fonctions polynomiales sont les fonctions les plus simples pouvant avoir cette allure : c'est pourquoi dans de nombreuses situations très simplifiées, comme celle-ci, on prend pour fonction coût un polynôme du troisième degré.

– On notera que la fonction C est toujours à considérer sur un intervalle borné.

Partons d'un volume v. Un accroissement Δv du volume produit, au-delà de v, coûtera $C(v + \Delta v) - C(v)$.
Mais il est plus clair de se référer au coût moyen par unité de volume supplémentaire produit. Ce coût a pour expression :

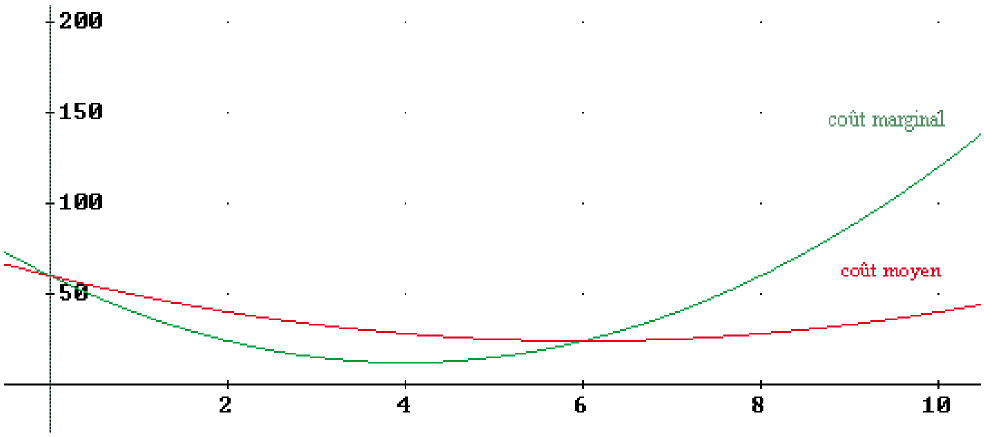
$$\frac{C(v+\Delta v)-C(v)}{\Delta v} \quad (1)$$

Passer à la limite dans cette expression conduit à la dérivée $C'(v)$.
Mais pourquoi utiliser la dérivée ? N'est-elle pas un concept trop évolué pour traiter d'une question aussi simple ? La réponse est double : premièrement, le passage à la dérivée nous libère du choix, en fait arbitraire, de la quantité Δv ; deuxième-

ment, calculer la valeur de l'expression (1) pour un Δv donné et pour diverses valeurs de v est un calcul numérique ennuyeux, alors que calculer algébriquement la dérivée de la fonction C est une chose toute simple, et qu'une fois cette dérivée calculée, on peut en obtenir commodément des expressions numériques et graphiques.
La dérivée a pour expression : $C'(v) = 3v^2 - 24v + 60$.
La dérivée s'appelle « coût marginal » du produit considéré. Revenons maintenant au point de vue de l'industriel.
La donnée de base qui lui permet d'établir le prix de vente n'est bien entendu pas le coût marginal, mais bien le coût moyen de l'unité produite. Ce coût s'exprime comme suit :

$$M(v) = \frac{C(v)}{v} = v^2 - 12v + 60$$

Les deux courbes, celle du coût marginal et celle du coût moyen, sont présentées ensemble sur la figure ci-après. On lit sur cette figure que le coût moyen passe par un minimum lorsque le coût marginal est égal au coût moyen, ce qui est assez clair si on y réfléchit quelque peu : en effet, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est inférieur au coût moyen calculé jusque-là, le coût moyen diminue nécessairement ; et inversement, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est plus grand que le coût moyen, celui-ci augmente.



Il est important que ces considérations heuristiques soient traduites en propriétés que l'on peut démontrer à l'intérieur du modèle choisi (faute de quoi, il conviendrait de s'interroger sur le bien-fondé des concepts introduits pour modéliser la situation en jeu).

Cherchons donc le minimum du coût moyen. La dérivée de ce coût s'écrit :

$$M'(v) = \frac{1}{v}\left(C'(v) - M(v)\right).$$

Ceci montre que $M(v)$ atteint un extremum lorsque $C'(v) = M(v)$, qui est dans notre cas un minimum.
Ce que nous venons de faire mérite un commentaire général. On peut en effet se demander si ce n'est pas mobiliser des instruments conceptuels trop évolués que de mettre en forme algébrique une fonction de coût et ensuite de la dériver.
L'argument principal nous semble être le suivant : pour quelqu'un qui a un peu l'habitude de l'algèbre et du calcul différentiel, les moyens mathématiques mobilisés s'avèrent commodes pour exprimer et comprendre les phénomènes en question. Toutefois, ce serait tout autre chose que d'analyser une situation réelle, presque nécessairement compliquée par la présence de facteurs nécessitant d'aménager le modèle idéalement simple sur lequel nous avons tablé.

Les activités présentées dans cette partie sont disponibles sur le cédérom, section « Compléments aux documents d'accompagnement ».

Enseignement de spécialité

Résolution de problèmes à l'aide de graphes

Voir l'annexe page 107.

Complément sur les suites

Les suites ont été introduites en classe de première ES pour décrire l'évolution de situations itératives simples ou de phénomènes chronologiques. L'objectif premier était de familiariser les élèves avec un nouveau concept, d'observer le comportement des premiers termes et de décrire explicitement le terme général dans le cas des suites arithmétiques ou géométriques. Le programme de terminale introduit quelques nouveaux éléments permettant d'étudier des situations plus variées.
L'intérêt de l'exemple qui suit est de réactualiser des connaissances antérieures, de rencontrer des suites du type $u_{n+1} = au_n + b$ et d'illustrer la démarche « réflexion préalable – expérimentation numérique – calculs algébriques » dont la pratique est un des objectifs du programme.

Exemple : Remboursement à mensualités constantes d'un prêt bancaire

Le calcul du remboursement d'un prêt dans le cas où il s'effectue selon des mensualités constantes pour une période donnée et pour un taux fixe est un problème classique, abordable dès la première. Nous l'abordons ici suivant trois points de vue distincts. Il peut être intéressant que des groupes d'une même classe travaillent sur des approches différentes et confrontent ensuite leurs résultats ; certains élèves peuvent être plus à l'aise avec l'un des points de vue mais trouveront aussi un intérêt à explorer les autres.
La situation traitée est la suivante :
Pour acheter un appartement, une famille a besoin d'un capital de 80 000 €. D'après l'établissement de prêt contacté, elle peut bénéficier d'un taux annuel de 5 %. Elle envisage de rembourser par mois un montant constant.
– Le montant de la mensualité peut-il être aussi petit que l'on veut ?
– Pour des mensualité de 600 € par mois, combien de temps durera le remboursement ?
Il convient, puisqu'on parle de remboursements mensuels, de se ramener à un taux mensuel τ pour les intérêts du prêt ($0 < \tau < 1$). Comme on l'a vu dans le paragraphe sur les limites, on peut utiliser un taux proportionnel égal à 0,05/12 (soit un pourcentage mensuel de 0,42 %) ou un taux actuariel égal à $1{,}05^{1/12} - 1$ (soit un pourcentage mensuel de 0,4074 %) : les calculs actuels utilisent les taux actuariels (« plus justes »), ce que nous faisons ici (soit : $\tau = 1{,}05^{1/12} - 1$).
Pour répondre à la première question, notons qu'au bout d'un mois, le capital emprunté C = 80 000 € a la valeur :

$$C_1 = (1 + \tau)C \approx 80326.$$

Le montant minimum de remboursement mensuel est de 326 €, en dessous duquel la somme à rembourser ne diminuera pas.
Pour un remboursement mensuel de valeur M = 600, le capital à rembourser va diminuer de mois en mois : le prêt est donc possible.

Première approche

(Cette activité est disponible sur le cédérom.)

Dans cette approche, inspirée par la résolution de la première question, on choisit de considérer qu'au mois p, on rembourse la totalité I_p des intérêts du capital D_{p-1} restant à rembourser, le reste de la mensualité donnant la part R_p du capital remboursé ce mois là.

Un raisonnement qualitatif préalable permet de dire qu'au début du prêt, la part des mensualités liées au remboursement des intérêts est forte : le capital à rembourser est élevé, les intérêts représentent une somme importante ; en fin d'emprunt, les intérêts ne représentent qu'un faible somme, leur part dans le remboursement devient faible.

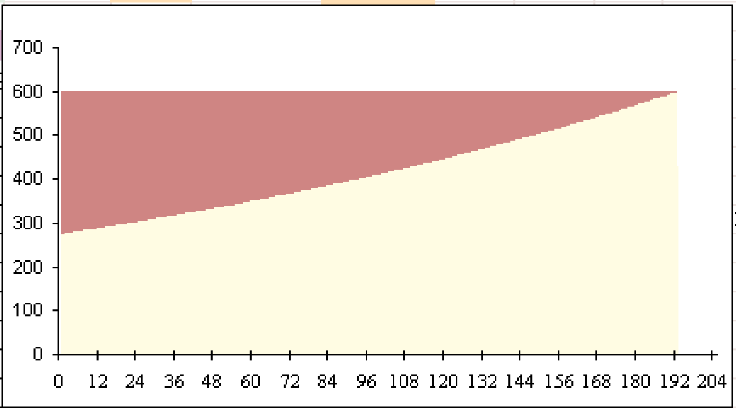
On peut établir les formules suivantes :

$$I_p = \tau \times D_{p-1} \,;\, R_p = M - I_p \,;\, D_p = D_{p-1} - R_p.$$

Ces formules permettent de mettre en œuvre des calculs itératifs, mois après mois et une représentation graphique permet de visualiser les effets annoncés.

taux= 0,05 taux mensuel= 0,004074

C=	80 000 €	M=	600 €
	total intérêts	capital rembour	total remb
	35 629 €	80 000 €	115 627 €
	intérets rembou	part capital rem	capital restant
0	0	0	80 000 €
1	325,93	274,07	79725,93
2	324,81	275,19	79450,74
3	323,69	276,31	79174,44
4	322,57	277,43	78897,00
5	321,44	278,56	78618,44
6	320,30	279,70	78338,74
7	319,16	280,84	78057,90
8	318,02	281,98	77775,92
9	316,87	283,13	77492,79
10	315,72	284,28	77208,50



On peut alors chercher à en savoir plus sur les suites étudiées, ne serait-ce qu'en vue de déterminer par une formule la durée du prêt : les banques utilisent effectivement de telles formules et ne déterminent pas cette durée graphiquement ou par des calculs itératifs. On trouve :

$$D_p = (1+\tau)D_{p-1} - \mathrm{M} \qquad I_p = (1+\tau)I_{p-1} - \tau M \qquad R_p = (1+\tau)R_{p-1}$$

La durée n du prêt vérifie l'équation $\mathrm{R}_1 + \ldots + \mathrm{R}_n \approx \mathrm{C}$, soit :

$$n \approx \frac{\ln(M/(M-\tau C))}{\ln(1+\tau)} \quad (1).$$

D'où $n = 193$ (la dernière mensualité n'est que de 426,93 €).

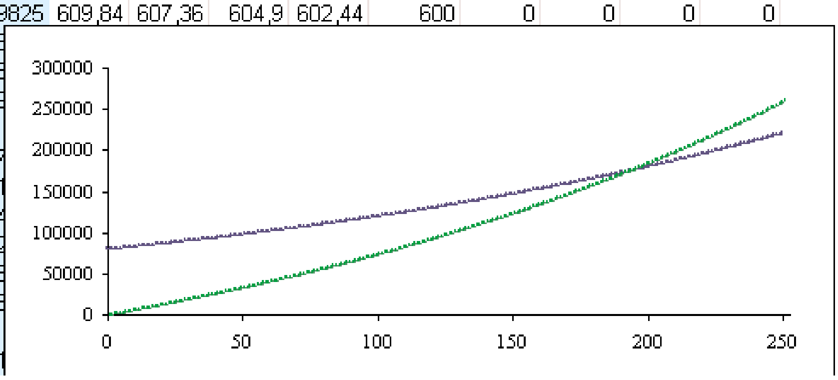
Remarque – Les suites (D_n) et (I_n) vérifient une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$; on associera à ces suites la représentation graphique des fonctions $f(x) = ax + b$ et $g(x) = x$; à titre de synthèse, on mettra en évidence la convergence ou la divergence de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ suivant que $a < 1$ ou $a > 1$. L'explicitation de la suite géométrique associée confirmera l'observation graphique.

Deuxième approche

Un autre point de vue consiste à faire le raisonnement suivant : si le prêt s'arrête à n mensualités, c'est que l'ensemble des versements effectués a, en fin de remboursement, la même valeur que celle acquise par le capital emprunté. Or la valeur du capital, au bout de n mensualités, est $\mathrm{C}_n = (1+\tau)^n\mathrm{C}$, celle du premier versement est $(1+\tau)^{n-1}\mathrm{M}$, du deuxième $(1+\tau)^{n-2}\mathrm{M}$, etc.

En se plaçant d'un point de vue expérimental, sur tableur, on peut observer à quel instant n la valeur actualisée de l'ensemble des versements (courbe en vert ci-dessous) égale celle du capital (courbe en bleu).

C=	80 000 €		taux=	0,05	τ=	0,004074	M=	600 €		
- €	80000									
600 €	80325,9299	600 €	0	0	0	0	0	0	0	0
1 202 €	80653,1877	602,44	600	0	0	0	0	0	0	0
1 807 €	80981,7788	604,9	602,44	600	0	0	0	0	0	0
2 415 €	81311,7085	607,36	604,9	602,44	600	0	0	0	0	0
3 025 €	81642,9825	609,84	607,36	604,9	602,44	600	0	0	0	0
3 637 €	81975,8									
4 252 €	82309,5									
4 869 €	82644,9									
5 489 €	8298									
6 111 €	83319,7									
6 736 €	83659,1									
7 364 €	84									
7 994 €	84342,2									
8 626 €	84685,8									
9 261 €	85030,8									
9 899 €	85377									
10 539 €	85725,1									



Le nombre n doit vérifier : $(1 + \tau)^n C = M((1 + \tau)^{n-1} + (1 + \tau)^{n-2} + \ldots + 1)$. On retrouve ainsi la formule (1).

Troisième approche

On considère que la p-ième mensualité M représente le remboursement d'une portion K_p du capital initial qui justement vaut M au moment de son remboursement, d'où : $K_p(1 + \tau)^p = M$.

La suite K_p est donc géométrique et on doit avoir, pour un prêt de durée n :

$K_1 + \ldots + K_n = C$. En exprimant la somme de cette suite géométrique on retrouve encore la formule (1).

Remarque – La formule (1) permet aussi de fixer la mensualité M si on fixe la durée n :

$$M = (1+\tau)^n \tau C \Big/ \left((1+\tau)^n - 1\right).$$

Suites du type $u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$

On donnera quelques exemples de situations amenant à des suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre deux (telles la suite de Fibonacci). L'objectif est de manipuler des suites de ce type, de conclure sur leur monotonie dans des cas simples, éventuellement de poursuivre l'étude grâce aux propriétés des suites géométriques. Aucune recherche de solution générale n'est à faire.

Sur quelques exemples, on pourra introduire une écriture matricielle de la relation de récurrence – en posant $v_n = u_{n+1}$, on obtient $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ – puis utiliser les méthodes développées en première ou dans l'autre partie de cette spécialité.

Prolongement d'une suite finie

On pourra consulter le document d'accompagnement de première L à ce propos (« Analyse », terminale, paragraphe sur les suites, p. 15). Pour la suite (k) « Voir et dire », dont les premiers termes sont :

1 – 11 – 21 – 1211 – 111221 – 312211 (et non 31 21 11),

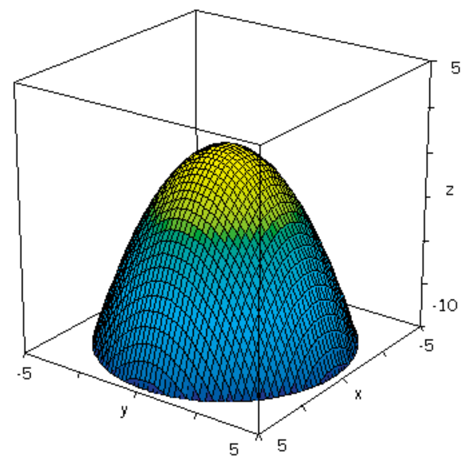
on pourra s'interroger sur la parité du nombre de chiffres ou sur le plus grand chiffre qui peut être présent dans l'écriture des termes de cette suite (et montrer que c'est le chiffre 3).

Cette suite est aussi un exemple d'algorithme simple qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite en théorie, mais pas en pratique : en effet, le terme d'indice 77 a déjà plus d'un milliard de chiffres (voir à ce sujet *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, www.research.att.com/~njas/sequences, ou Conway J. H. et Guy R.K., « The Look and Say Sequence », dans *The Book of Numbers*, New York, Springer-Verlag, p. 208-209, 1996).

Géométrie dans l'espace

L'objectif de ce chapitre est avant tout de consolider les connaissances de première ; les élèves ont alors vu le lien entre une fonction f de deux variables x et y et la surface d'équation $z = f(x,y)$. Quelques activités élémentaires relatives aux surfaces pourront être proposées. On pourra ainsi associer une représentation dans l'espace à la résolution analytique de la recherche d'un extremum d'une fonction de deux variables sous une contrainte linéaire.

> Les exemples qui suivent privilégient un questionnement mathématique. Qu'on en reste là ou que l'on utilise des situations économiques, on entraînera toujours à une vision intuitive et on se limitera à des questions simples.
>
> 1) Le choix de cet exemple permet d'user d'un langage très intuitif ; une activité parallèle utile pourra être de faire découvrir aux élèves la forme générale des courbes de niveau d'une surface topographique autour respectivement d'un sommet, d'un fond et d'un col ou, inversement, de reconstituer, à partir d'une carte topographique, le profil de la ligne joignant deux points donnés.



Considérons la surface d'équation $z = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ (1), associée à la fonction f des deux variables réelles x et y définie par $f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

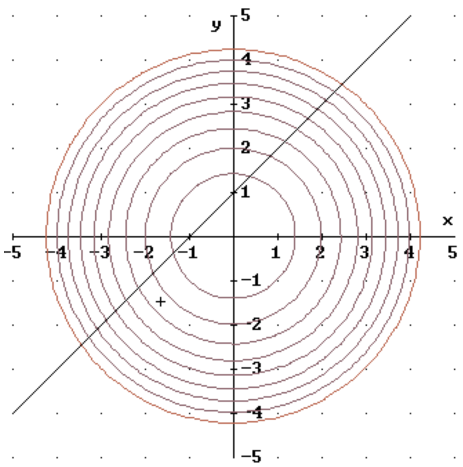
On l'a représentée ci-contre dans une « boîte » définie par :

$-5 \leqslant x \leqslant 5$

$-5 \leqslant y \leqslant 5$

$-10 \leqslant z \leqslant 5$

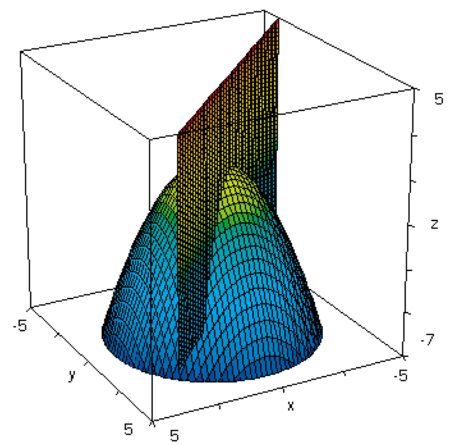
Cette surface a la forme d'un dôme ayant son sommet à l'origine, à l'altitude 1.



Les courbes de niveau de cette surface sont des cercles d'équations $x^2 + y^2 = 2(1 - h)$ où h représente l'altitude. La figure ci-contre montre quelques courbes de niveau de la surface (de $h = 1$ à $h = -8$).

Dès que l'on s'écarte de l'origine dans une direction quelconque, la surface descend. Elle atteint l'altitude 0 sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$, c'est-à-dire à une distance de l'origine égale à $\sqrt{2}$. À l'extérieur de ce cercle, les altitudes deviennent négatives, et elles tendent vers $-\infty$ lorsque la distance à l'origine tend vers l'infini.

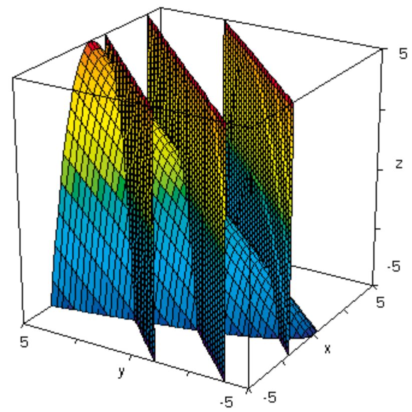
La même figure montre une droite dont l'équation dans le plan Oxy est $y = 1 + x$. Considérée dans le système d'axes (Ox,Oy,Oz), cette équation est aussi celle d'un plan vertical.

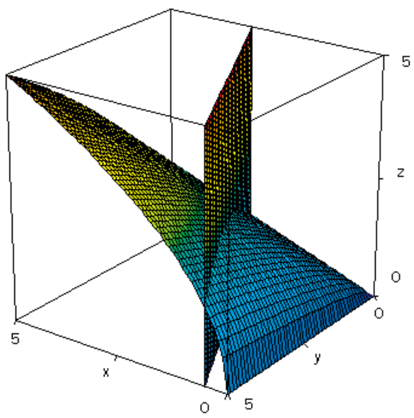


L'intersection de ce plan vertical et de la surface est comme un sentier qui commence par monter sur le dôme – sans toutefois atteindre son sommet –, avant de redescendre. Les courbes de niveau montrent où se trouve le point le plus haut de ce sentier.
Pour déterminer ce point analytiquement, remplaçons la variable y dans l'équation (1) par sa valeur $1 + x$. Nous obtenons, après calcul, $z = 1 - x - x^2$; cette équation donne l'altitude z du sentier pour chaque valeur de x.

Sous la contrainte $y = 1 + x$, on est donc ramené à la fonction altitude $1 - x - x^2$. L'altitude est maximale pour $x = -\frac{1}{2}$; et donc le point le plus haut de ce sentier a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

2) $z = y - x^2$
Déterminer le maximum de z sous les contraintes suivantes :
$y = x + 4$
ou $y = x + 1$
ou $y = x - 3$





3) $z = \sqrt{xy}$

Déterminer le maximum de z sous la contrainte $y = -2x + 6$.

Annexe
Les graphes dans l'enseignement de spécialité

Introduction

L'introduction d'éléments de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de la classe terminale de la série ES constitue une grande nouveauté :
– pour la première fois, cette branche des mathématiques discrètes fait son entrée dans l'enseignement secondaire français ;
– le travail proposé est axé sur la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral.

Pourquoi introduire des éléments sur les graphes ?

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure. On trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche – volontairement modeste – de situations diverses (gestion de stocks, transports à coûts minimaux, recherche de fichiers dans des ordinateurs, reconnaissance de mots…) auxquelles les élèves pourront être par la suite confrontés.
Pour de nombreux lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire : s'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique et finalement, progresser. Enfin le travail fait sur les graphes pourra être investi dans des travaux personnels encadrés.

Pourquoi axer le travail sur la seule résolution de problèmes ?

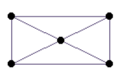
La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes ; toute présentation théorique magistrale du sujet est contraire au choix fait ici. De plus, la résolution de problèmes laisse place à l'initiative des élèves, avec un temps nécessaire de tâtonnements et d'essais. L'objectif, ici, est d'apprendre à représenter une situation à l'aide d'un graphe en se posant d'abord les questions suivantes : « Quels objets vont tenir le rôle de sommets, lesquels deviennent les arêtes ? »
Pour illustrer le type de travail à faire, on trouvera ci-dessous une liste de 25 exemples permettant de faire le tour de toutes les notions au programme. Bien entendu, cette liste ne revêt aucun caractère officiel ou obligatoire. L'optique étant la résolution de problèmes, c'est le bon usage des notions relatives aux graphes, et non la mémorisation de définitions formelles, qui est ici recherchée.
Un lexique est fourni ; sa fonction est de définir clairement les limites de cet enseignement neuf : toute notion relative à la théorie des graphes, qui ne correspondrait pas à l'un des termes du lexique, est hors programme.

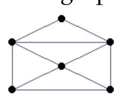
Exemples

Dans les exemples ci-dessous, on a parfois construit les graphes et donné quelques éléments de réponse afin d'avoir assez vite une idée générale de ce qui est proposé : on indique aussi les contenus illustrés ou introduits dans chacun des exemples proposés.

Les enveloppes

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?

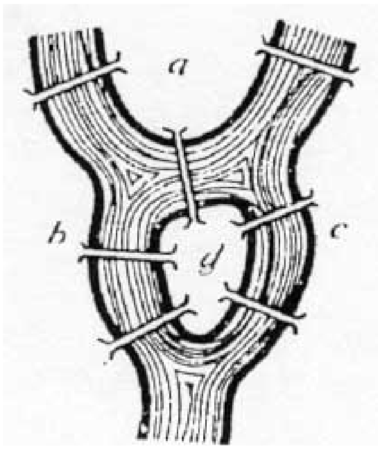


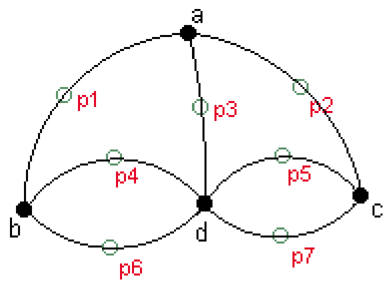


• *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; chaîne eulérienne ; théorème d'Euler.*

Les ponts de Königsberg

Au XVIII^{e} siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait sept ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

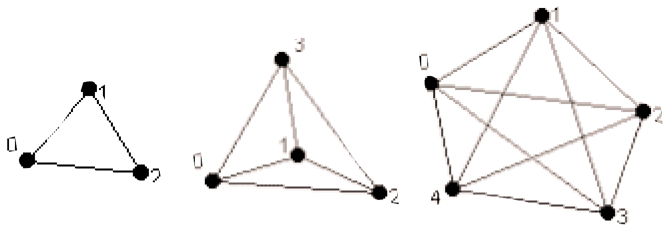




• *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; cycle eulérien.*

Dominos

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n, pour n = 2, 3, 4.

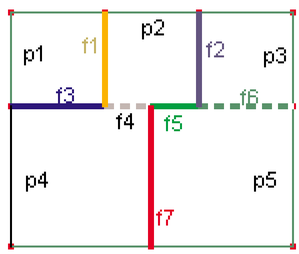


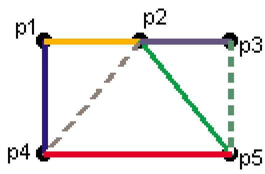
Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des « doubles » puisqu'on peut toujours les intercaler

• *Contenu : graphes complets ; chaînes eulériennes ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

Traversée de frontières

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

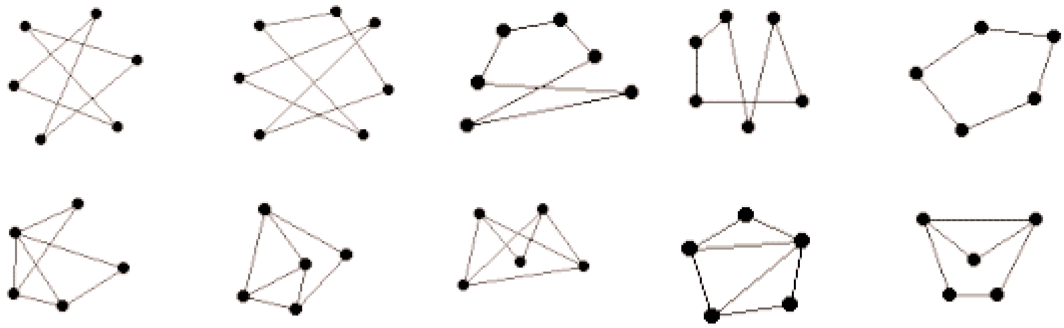




• *Contenu : chaîne eulérienne ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

Dessins de graphes

– Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



– Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :

6-3-2-2 -1-1-1 7-5-3-2-2-2-2-2

• *Contenu : représentations de graphes, degrés de sommets.*

Associer un graphe à une situation

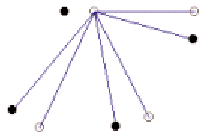
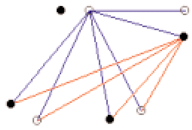
Comparer les trois graphes définis ci-dessous :
– on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;
– on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;
– les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de {1,2,3,4} ; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
Représenter la situation suivante à l'aide d'un graphe : « Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays. »
• *Contenu : représentations de graphes ; sommets, sommets adjacents ; arêtes.*

Matches de football

Une ligue de football comporte cinq équipes.
– Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?
– Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?
• *Contenu : degré d'un sommet ; lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes.*

Poignées de main

M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance : certains participants à la réunion se saluent en se serrant la main. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

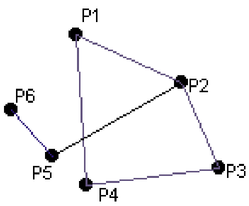
Une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes. Pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il s'agit nécessairement des nombres 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0.	Une personne a échangé 6 poignées de main ; c'est donc son conjoint qui n'en a échangé aucune. 	Une personne échange 5 poignées de mains ; c'est donc son conjoint qui en échange une seule. 	Une des personnes des deux couples non encore considérés échange 4 poignées de main, donc son conjoint en échange 2. Que reste-t-il pour le dernier couple ?

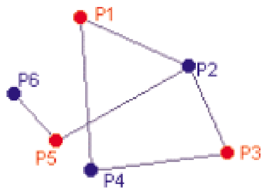
• *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet.*

Transport de produits chimiques

On trouvera ci-contre le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?

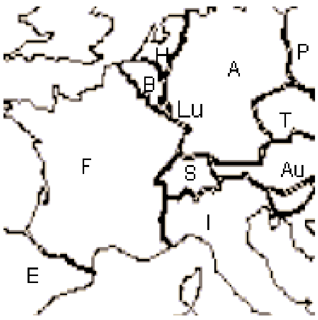
• *Contenu : nombre chromatique.*

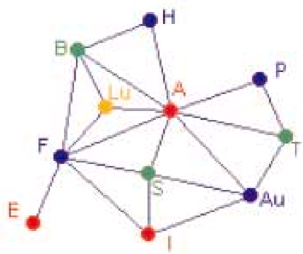




Coloration de la carte de l'Europe

On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins).





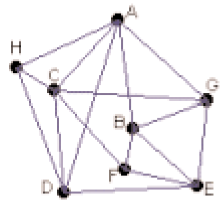
• *Contenu : sous-graphe complet ; nombre chromatique.*

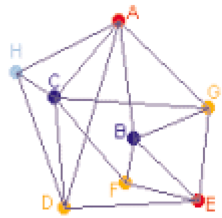
Un problème d'aquariophile

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×		×			×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?





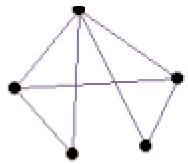
• *Contenu : matrice associée à un graphe ; sous-graphe ; graphe complet ; nombre chromatique.*

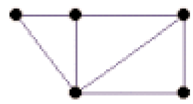
Nombre chromatique

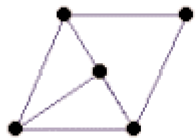
Tracer les graphes associés aux matrices ci-dessous et chercher leur nombre chromatique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

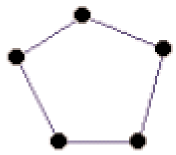
Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à C ?







Donner des matrices associées au graphe suivant :



• *Contenu : matrices et graphes associés ; nombre chromatique.*

Organisation d'un examen

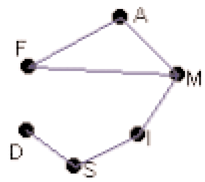
On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont :

F, A, M D, S I, S I, M

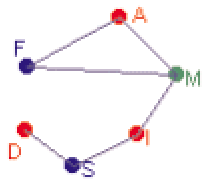
1) Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle ?
2) Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?
• *Contenu : sous-graphes ; graphe complet ; nombre chromatique.*

Solution

Le graphe associé à cette situation est le suivant :



Tout sous-graphe de plus de trois sommets comporte des arêtes ; deux sous-graphes d'ordre trois (de sommets respectivement A,D,I et F,D,I) n'ont pas d'arêtes : le nombre maximum d'épreuves en parallèle est trois.



Il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 ; le nombre chromatique est au moins égal à 3 ; on voit que trois couleurs suffisent.

Ouverture de magasins

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.
Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.
• *Contenu : sous-graphes.*

Solution

Il n'y a qu'un seul sous-graphe engendré par trois éléments et qui soit sans arêtes ; tous les sous-graphes engendrés par 4 ou 5 éléments ont des arêtes.

Puissances de la matrice associée à un graphe

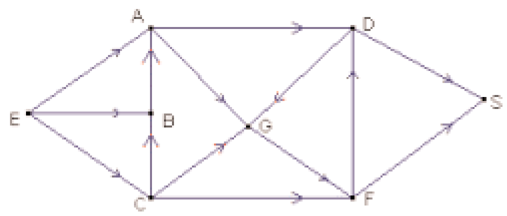
Ci-après, la matrice M est associée à un graphe orienté G qu'on représentera.
Tracer le graphe et interpréter les termes de M^2, puis de M^3.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté ; longueur d'une chaîne.*

Circuits touristiques

Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).



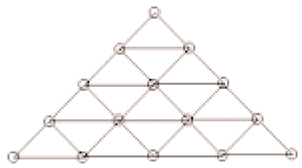
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on a :
La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2
La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6
La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

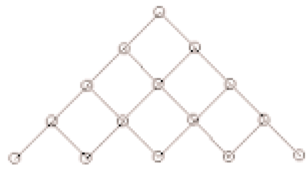
Combien de traversées peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?
Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.
• *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté.*

Coloration de graphes

– Montrer que le nombre chromatique du graphe (1) ci-dessous vaut 3. Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?
– Montrer que le nombre chromatique du graphe (2) ci-dessous vaut 2.



(1)



(2)

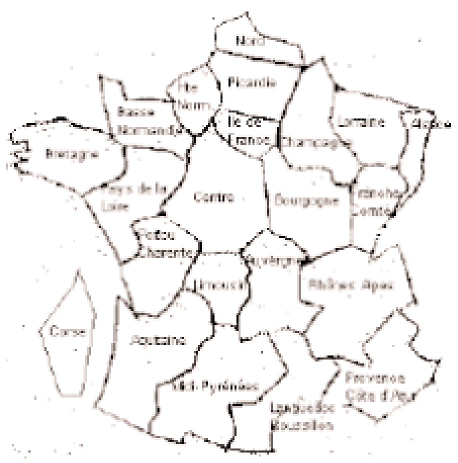
• *Contenu : nombre chromatique, sous-graphes complets.*

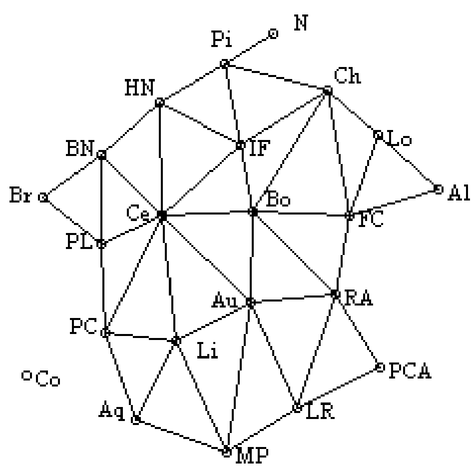
Algorithme de coloration d'un graphe

On commence par établir une liste ordonnée des sommets.
Tant qu'il reste des sommets à colorer, exécuter les actions suivantes :
– choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage ;
– chercher dans la liste des sommets le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage ;
– examiner tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'eux, le colorer lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet coloré avec la couleur d'usage.

> *Remarque* – Cet algorithme fournit un coloration, mais le nombre r de couleurs utilisées peut-être supérieur au nombre chromatique. D'où l'intérêt éventuel de comparer r à un minorant r' du nombre chromatique : si $r = r'$, c'est le nombre chromatique.

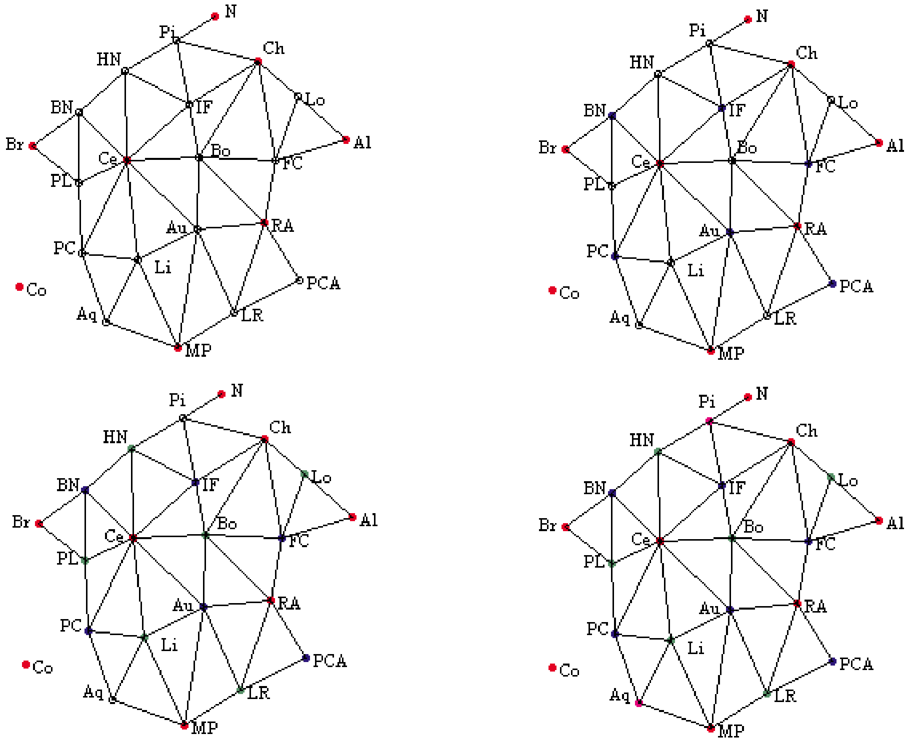
On veut colorer chaque région administrative française de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur :
– montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs ;
– appliquer l'algorithme ci-dessus.





Solution

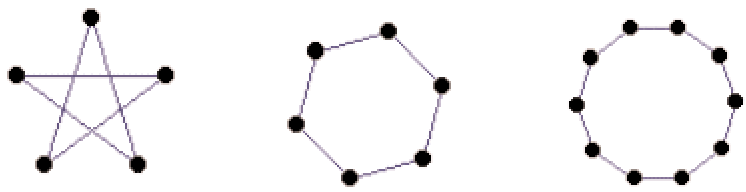
Voici le classement utilisé : ordre décroissant des degrés et ordre alphabétique pour les *ex-æquo* :



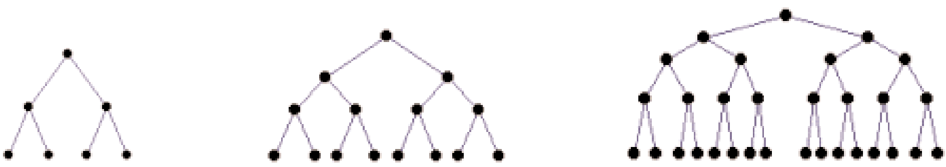
• *Contenu : coloration ; nombre chromatique.*

Diamètre d'un graphe

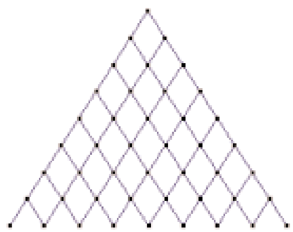
1) Caractériser les graphes de diamètre 1.Trouver le diamètre des graphes ci-dessous.



2) Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous ? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?



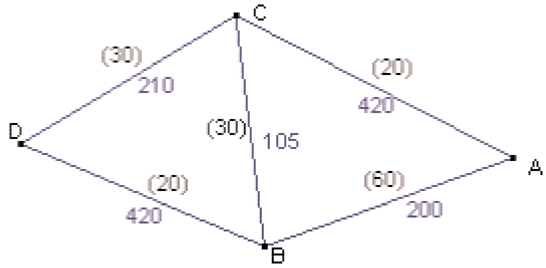
3) Quel est le diamètre du graphe ci-contre ? Si on « continuait » ce graphe, comment évoluerait l'ordre du graphe en fonction du diamètre ?



• *Contenu : diamètre d'un graphe.*

Parcours autoroutier

Sur les arêtes du graphe suivant, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages. Entre D et A, déterminer :
– la chaîne la plus courte ;
– la chaîne qui minimise la somme dépensée en péage.



• *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

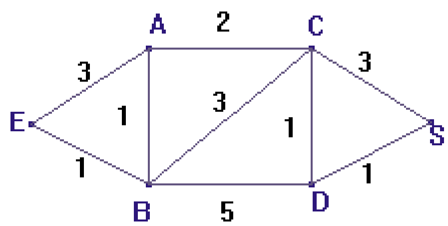
Algorithme de Dijkstra

Il existe plusieurs algorithmes de recherche de la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe pondéré par des poids positifs ; on présente ici un tel algorithme, dû à Dijkstra.

L'idée de l'algorithme est de procéder de proche en proche, en marquant à chaque étape au crayon (c'est-à-dire de façon provisoire) certains sommets, puis à l'encre (c'est-à-dire de façon définitive) un des sommets déjà marqués au crayon. On arrête quand on a marqué à l'encre le sommet final.

Exemple

On cherche le plus court chemin de E à S sur le graphe suivant :



Pour démarrer, on marque à l'encre (rouge) le sommet E avec le poids 0, puisque le plus court chemin de E à E est évidemment de longueur 0.

Chaque étape de l'algorithme consiste ensuite à exécuter les actions suivantes, tant que le sommet S à atteindre n'est pas marqué à l'encre.

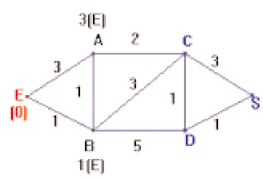
– Soit T le dernier sommet marqué à l'encre.

– Pour tout sommet T' non encore marqué à l'encre et adjacent à T, calculer la somme *s* du poids de T et du poids de l'arête reliant T à T' ; si T' n'est pas encore marqué au crayon (noir), marquer T' au crayon avec le poids *s* ; si T' est déjà marqué au crayon, remplacer (toujours au crayon) le poids provisoire de T' par *s* si *s* est plus petit (on a trouvé un chemin plus court), sinon garder le poids précédent.

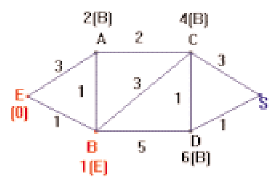
– Parmi tous les sommets marqués au crayon, en choisir un de poids minimum et marquer à l'encre ce poids.

On réitère l'opération tant que le sommet final S n'est pas marqué à l'encre. Quand l'algorithme se termine, le poids marqué en S est la longueur d'une plus courte chaîne reliant E à S. On peut facilement raffiner l'algorithme pour obtenir cette plus courte chaîne : il suffit à chaque fois que l'on marque provisoirement un sommet, de marquer, outre le poids, le sommet précédent, ce qui permet de retrouver une chaîne de longueur minimale en repartant de S, comme dans les figures ci-dessous.

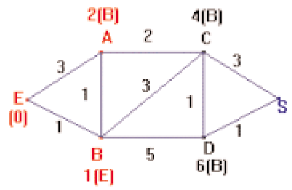
L'algorithme, exécuté sur l'exemple ci-dessus, donne les étapes suivantes :



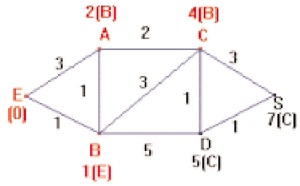
Etape 1



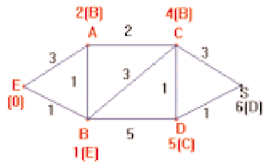
Etape 2



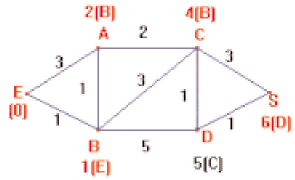
Etape 3



Etape 4



Etape 5



Etape 6

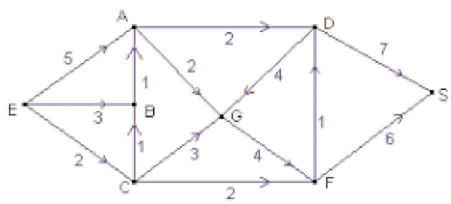
On peut représenter les différentes étapes de l'algorithme, exécuté sur cet exemple, par un tableau où figurent à droite les éléments successifs marqués de façon définitive.

E	A	B	C	D	S	$\mathcal{S}$
0	3(E)	1(E)	∞	∞	∞	E
	2(B)	*1(E)*	4(B)	6(B)		E,B
	2(B)					E,B,A
			4(B)	5(C)	7(C)	E,B,A,C
				5(C)	6(D)	E,B,A,C,D
					6(D)	E,B,A,C,D,S

La plus courte chaîne a un poids 6 ; elle se lit ici à l'envers SDCBE : S a un poids 6 venant de D, D est pondéré à partir de C, C à partir deB, B à partir de E.

Le même algorithme s'applique aux graphes orientés.

Exemple



E	A	B	C	D	F	G	S	$\mathcal{S}$
0	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞	E
			2(E)		4(C)	5(C)		E,C
	4(B)	*3(E)*						E,B,C
	4(B)			6(A)				E,B,C,A
				5(F)	*4(C)*		10(F)	E,B,C,A,F
				5(F)				E,B,C,A,F,D
						5(C)		E,B,C,A,F,D,G
							10(F)	E,B,C,A,F,D,G,S

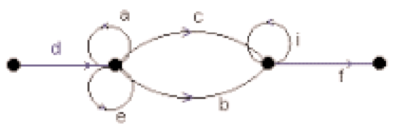
La chaîne la plus courte se lit à l'envers sur le tableau : S, F, C, E. Elle a pour longueur 10.

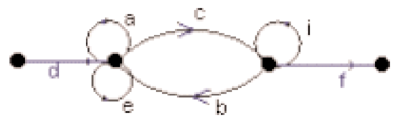
Remarque – À la fin de l'algorithme, tous les poids marqués à l'encre donnent les longueurs des plus courtes chaînes reliant les sommets considérés au sommet initial. Une preuve formelle de ce fait est difficile (comme il est difficile, par exemple, de prouver formellement que l'algorithme classique de multiplication des entiers donne le nombre cherché) et n'est pas exigible. On peut calculer que, si le nombre de sommets est n, le nombre d'opérations à faire est au plus de l'ordre du carré de n, ce qui est en général beaucoup plus petit que le nombre de chaînes sans cycles reliant E à S : c'est donc bien plus efficace que l'algorithme élémentaire qui consiste à regarder toutes les chaînes reliant E à S, et à chercher la plus courte.

• *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

Reconnaissance de codes

Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.
– Les mots « decif » et « daaeebiif » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessous ?
– Donner, pour chaque graphe ci-dessous, la liste des mots de 5 lettres reconnus.
– Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.





• *Contenu : graphe étiqueté.*

L'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.
– Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'état ?
– Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
– Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.
– Soit M la matrice de transition associée à ce graphe :

Vérifier que $M = N - \frac{1}{2}R$, o $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2, R^2, NR et RN puis en déduire M^n, pour n entier naturel.
– Au jour 0, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité p_n (resp. p'_n) que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au n-ième matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en 1.

> *Remarque* – On peut varier cet exemple en utilisant l'égalité matricielle suivante, où a et b sont des nombres dans $]0,1[$, et en calculant ainsi aisément la puissance n-ième d'une matrice de transition associée à un graphe probabiliste :
>
> $$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} + (1-a-b)\begin{pmatrix} a/(a+b) & -a/(a+b) \\ -b/(a+b) & b/(a+b) \end{pmatrix}$$

• *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

Transferts de population

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.
– Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.
– Que se passe-t-il si on suppose que 99 % des habitants sont initialement en Y ou en X ? que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

> *Remarque* – On pourra refaire le problème en variant, non plus les conditions de départ, mais les coefficients de transition : 15 % et 5 %, ou 40 % et 20 %, par exemple.

• *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition.*

ANNEXE

Un problème d'endémie

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :
– étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
– étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
– étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.
Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer (avec une calculatrice ou un ordinateur) la probabilité qu'il soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :
– au départ, il est immunisé ;
– au départ, il est non malade et non immunisé ;
– au départ, il est malade.
Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Solution

Au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, etc., quel que soit l'état initial, l'individu considéré a une probabilité 0,755 d'être immunisé, 0,151 d'être non malade et non immunisé, 0,094 d'être malade. L'état (0,755 ; 0,151 ; 0,094) est stable. La maladie touche donc en permanence environ 9,4% de la population.

• *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

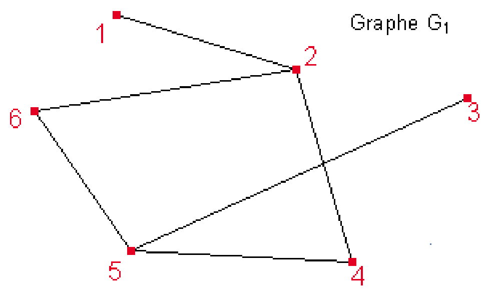
Lexique

La plupart des termes de ce lexique correspondent à leur sens intuitif et ne doivent pas faire l'objet de définitions formelles ; ils seront peu à peu introduits à l'occasion des exercices résolus. Le but de ce lexique est de délimiter nettement le type de problèmes à proposer aux élèves pour une évaluation : le vocabulaire donné doit suffire pour les résoudre.
La terminologie proposée ici pour les graphes non orientés est la plus répandue dans les ouvrages de langue française.
Dans le cas d'un graphe orienté, on ajoutera l'adjectif « orienté » lorsque cela s'avérera nécessaire.
Les pages suivantes proposent une explicitation du vocabulaire de la théorie des graphes qui figure au programme. Les « définitions » et les exemples donnés distinguent :
– les graphes non orientés ;
– les graphes orientés.

Graphes non orientés

Un graphe est constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes**. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**. Le nombre de sommets présents dans un graphe est l'**ordre du graphe**. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Le graphe G_1 est d'ordre 6 ; les sommets 1 et 2 sont adjacents, puisque reliés par une arête. Ce n'est pas le cas des sommets 5 et 2. Le degré du sommet 5 est égal à 3.



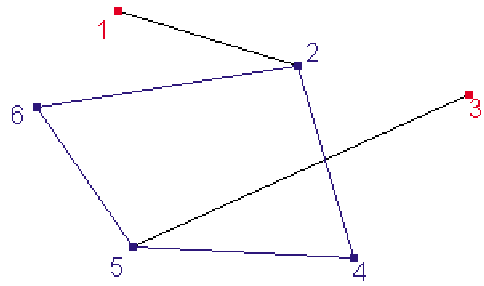
La matrice associée à un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice symétrique, de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut k, nombre d'arêtes reliant i et j.

La matrice 6 × 6 ci-contre est la matrice associée au graphe G_1 ; elle ne contient que des 0 et des 1 puisque deux sommets quelconques de ce graphe sont au plus reliés par une arête. C'est d'ailleurs à ce type de graphe que l'on se restreindra le plus souvent.

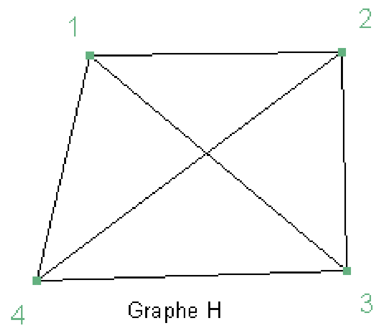
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sous-graphe d'un graphe G est un graphe dont les sommets de G et les arêtes sont certaines des arêtes de G reliant ces sommets. **Le** sous-graphe engendré par k sommets est le sous-graphe de G défini par ces k sommets et toutes les arêtes de G reliant deux de ces k sommets.
Un sous-graphe est **stable** s'il ne comporte aucune arête.

*Ci-contre, on a choisi, pour construire **le** sous-graphe G' (en bleu) les sommets 2, 4, 5 et 6. Les arêtes qui reliaient dans G_1 ces sommets (en bleu aussi) sont les arêtes du sous-graphe G'.*
*Les sommets 6, 2, 4 et 5 ainsi que les arêtes 5-6, 4-5 et 2-4 constituent **un** sous-graphe de G. Les sommets 1, 4, 6 et 3 définissent un sous-graphe stable.*



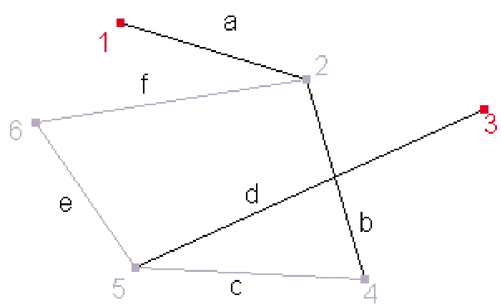
On appelle graphe complet un graphe dont tous les sommets sont adjacents.



Le graphe H est un graphe complet d'ordre 4.

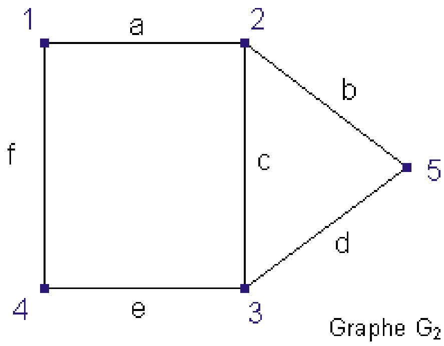
Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

Dans le graphe G_1, on a nommé les 6 arêtes a, b, c, d, e et f. La liste ordonnée de sommets (2-6-5-4) est une chaîne, que l'on peut aussi noter, en utilisant les arêtes qui la composent, (f/e/c). La longueur de cette chaîne vaut 3.



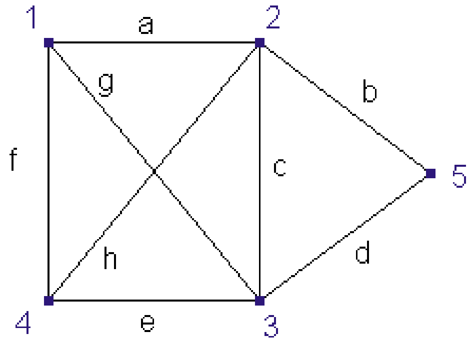
Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Dans le graphe G_2, (1-2-3-5-2-1) est une chaîne fermée que l'on pourrait aussi noter (a/c/d/b/a). Ce n'est pas un cycle, puisque l'arête a y intervient deux fois. En revanche, (a/c/e/f) est un cycle.



Graphe G_2

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on parle de **cycle eulérien**.

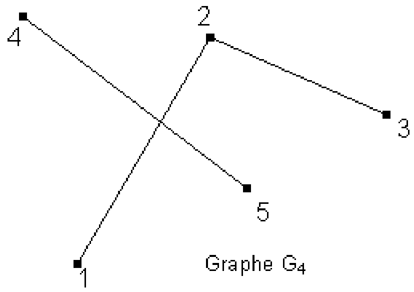


Graphe G_3

Dans le graphe G_3, (g/c/b/d/e/h/a/f) est une chaîne eulérienne.

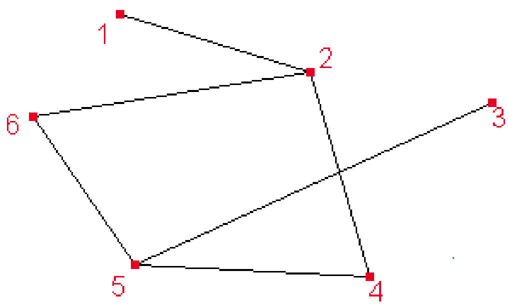
Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Le graphe G_3 est connexe.
Le graphe G_4 ne l'est pas : il n'existe pas de chaîne entre les sommets 5 et 3 par exemple.



Graphe G_4

La distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.
Reprenons le graphe G_1 :

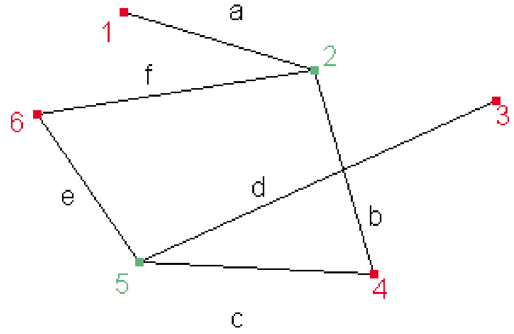


– il existe une chaîne de longueur 2 entre les sommets 1 et 4 : la chaîne (1-2-4). Ces deux sommets n'étant pas adjacents, la distance entre 1 et 4 vaut 2 ;
– le diamètre du graphe est 4 : en effet, la distance entre les sommets 1 et 3 vaut 4. On peut vérifier « à la main » qu'il n'existe pas de distance plus grande entre deux sommets.

Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

Le graphe G_1 a pour nombre chromatique 2 ; en effet, il faut au moins deux couleurs pour colorer ce graphe puisqu'il y existe des sommets adjacents. En outre, on vérifie que 2 couleurs suffisent.



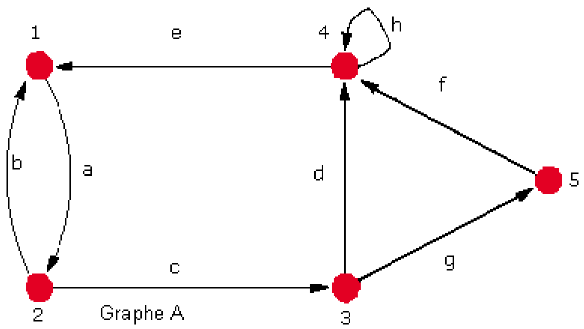
Graphes orientés

Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées : on parle alors de l'origine et de l'extrémité d'une arête. Une **boucle** est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.

On définit de même une chaîne orientée, une chaîne eulérienne orientée, un cycle orienté…

Le graphe A ci-contre est orienté. L'arête a *qui va de 1 vers 2 est distincte de l'arête b, qui va de 2 vers 1. L'arête h est une boucle.*

(1-2-3-5) est une chaîne orientée qui va de 1 à 5. (e/a/c/d) est un cycle orienté.

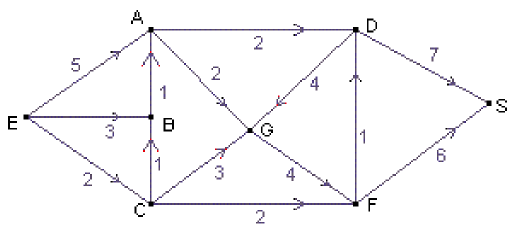


La matrice associée à un graphe orienté d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est i et l'extrémité est j.

Ci-contre, on a la matrice associée au graphe A.

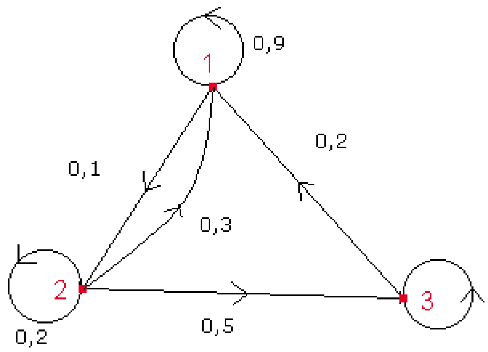
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un graphe étiqueté est un graphe orienté, dont les arêtes sont affectées d'étiquettes. Si toutes les étiquettes sont des nombres positifs, on parle de **graphe pondéré**. Dans ce cas, le **poids** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent. Une **plus courte chaîne** entre deux sommets, est parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.



Le graphe orienté ci-contre est pondéré. Le chaîne (C-B-A-G-F), a pour poids 1 + 1 + 2 + 4 = 8.

Un graphe probabiliste est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1.



Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles de l'individu et le poids d'une arête orientée issue du sommet i, et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j. L'**état probabiliste** de l'individu est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne.
Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans différents états (l'ensemble des états est le même pour chaque composant). L'état du système à un instant donné est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est de dimension $n \times n$. Le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne a pour valeur le poids de l'arête orienté allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.

Le graphe d'ordre 3 ci-dessus est un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est donnée ci-dessous. La somme des éléments d'une ligne vaut 1.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Les propriétés ci-dessous sont au programme ; elles seront introduites à l'occasion de certains exercices. Elles pourront être démontrées ou commentées.
Les élèves devront les connaître.
1) La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
2) Soit A la matrice associée à un graphe. Le terme (i,j) de la matrice A^r donne le nombre de chaînes de longueur r reliant i à j.
3) Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $\Delta + 1$, Δ étant le plus grand degré des sommets.
4) Théorème d'Euler : « Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. »
5) Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial, et P_k l'état probabiliste à l'étape k, on a $P_k = P_0 \times M^k$.
6) Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_k à l'étape k, converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie P = PM.

Contenu du cédérom *Mathématiques 2002*

Ce cédérom est autoexécutable. Il peut aussi être exploré en double cliquant sur le fichier math2002.htm présent dans la racine ; un explorateur Internet est alors nécessaire.

Partie « Lycée »

La partie « **programmes** » contient sous la forme de fichiers PDF :
• tous les programmes de mathématiques des séries générales et technologiques ;
• les programmes de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre des classes de seconde générale et technologique, première et terminale S ;
• les programmes d'enseignement scientifique des classes de première L et ES.

La partie « **accompagnement** » comprend, sous la forme de fichiers PDF :
• le document d'accompagnement du programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Ce document est accompagné de deux annexes : « 11 fiches de statistiques » et « À propos de géométrie plane », ainsi que d'une page, au format HTML, illustrant quelques liens possibles entre les programmes de mathématiques et de physique-chimie ;
• le document d'accompagnement des programmes de la classe de première des séries générales ;
• le document d'accompagnement pour l'option facultative du cycle terminal de la série L ;
• le document d'accompagnement de la classe terminale des séries ES et S. L'annexe « Probabilités et Statistique, séries ES et S » est uniquement disponible sur ce cédérom ;
• la section « compléments » contient :
– les figures des documents d'accompagnement des classes de seconde et première S,
– une partie spécifique à la première S illustrant les points du programmes « lieux géométriques » et « méthode d'Euler »,
– une partie spécifique à l'option facultative de la série L, présentant la partie du programme sur la perspective ainsi qu'une appliquette sur le codage par substitution de lettres,
– des activités sur tableur, extraites du document d'accompagnement du programme de la classe terminale ES,
– les figures du document d'accompagnement pour la classe terminale S,
– une partie « statistique et probabilités », donnant accès à de nombreuses simulations,
– une partie « documents divers », regroupant des appliquettes illustrant le programme d'arithmétique des classes terminales S et L, une section « maths et chimie » (calcul de pH, simulation d'une réaction chimique), une section « maths et musique », une section « maths et physique » (courbe de la décroissance radioactive du radon 222 et 220) et deux démonstrations de la convergence du nuage des coefficients binomiaux vers la courbe « en cloche »,
– les annexes au rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite « commission Kahane ») sur l'enseignement de la géométrie.

La partie « **TICE lycée** » comprend :
• le cours « Statistique en ligne », conçu par Bernard Ycart (université René-Descartes, Paris) et Claudine Robert (INRIA Rhône-Alpes) ;
• des logiciels, dans leur version de démonstration : *Cabri Géomètre II* (RIP) [1], *GeoplanW* (RIP), *GeospacW* (RIP) et *Geoplace* ;
• des activités intégrant l'utilisation des technologies de l'information et de la communication, réalisées par des groupes de travail dans les académies et coordonnées par la direction de la technologie (sous-direction des technologies de l'information et de la communication pour l'éducation).

1. Reconnu d'intérêt pédagogique par le ministère de l'Éducation nationale.

Partie « Collège »

La partie « **programmes** » contient sous la forme de fichiers PDF tous les programmes de mathématiques et de sciences physiques et chimiques de l'ensemble des classes du collège.

La partie « **accompagnement** » comprend :
• les documents d'accompagnement des programmes de mathématiques et de sciences physiques ;
• une note d'information de la direction de la prospective et du développement, intitulée « Pratiques d'enseignement observées en 6e » ;
• le dossier « Aire et périmètre », rédigé par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en classe relais.

La partie « **TICE collège** » comprend :
• des logiciels, dans leur version de démonstration : *Cabri Géomètre II* (RIP), *GeoplanW* (RIP), *GeospacW* (RIP) et *Geoplace* ;
• des activités intégrant l'utilisation des technologies de l'information et de la communication, réalisées par des groupes de travail dans les académies et coordonnées par la direction de la technologie (sous-direction des technologies de l'information et de la communication pour l'éducation).

Le bouton « Outils de consultation du cédérom » permet l'installation de logiciels nécessaires à la lecture des divers fichiers proposés.