

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2014

## MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5 (ES), 4 (L)

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une ANNEXE.

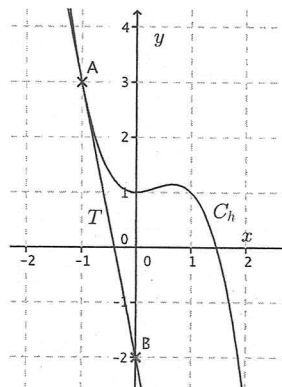
## EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La courbe  $C_h$  représentative d'une fonction  $h$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  est représentée ci-contre.

On a tracé la tangente  $T$  à  $C_h$  au point  $A(-1; 3)$ .  
 $T$  passe par le point  $B(0; -2)$ .

**Proposition :** le nombre dérivé  $h'(-1)$  est égal à  $-2$ .

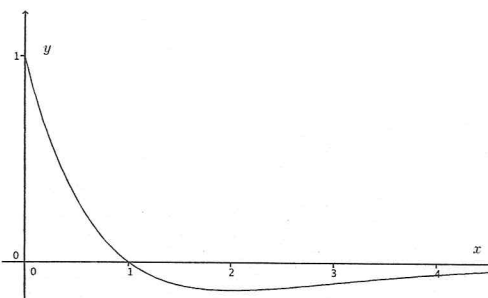


2. On désigne par  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

La courbe représentative de la fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$ , est donnée ci-contre.

Le point de coordonnées  $(1; 0)$  est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.

**Proposition :** la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[1; 4]$ .



3. **Proposition :** on a l'égalité

$$e^{5 \ln 2} \times e^{7 \ln 4} = 2^{19}.$$

4. La courbe représentative d'une fonction  $g$  définie et continue sur l'intervalle  $[0; 2]$  est donnée en **fig.1**.

La courbe représentative d'une de ses primitives,  $G$ , est donnée sur la **fig.2**. La courbe représentative de  $G$  passe par les points  $A(0; 1)$ ,  $B(1; 1)$  et  $C(2; 5)$ .

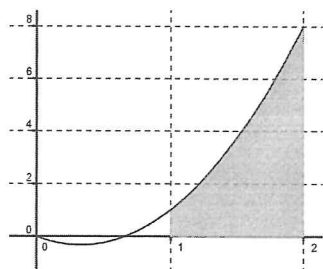


fig.1

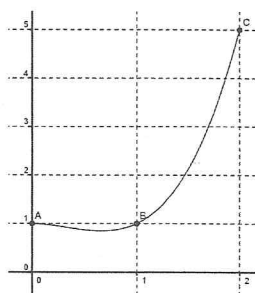


fig.2

**Proposition :** la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de  $g$  en **fig.1** est 4 unités d'aires.

## EXERCICE 2 (5points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1<sup>er</sup> janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1<sup>er</sup> janvier d'une année restent présents le 1<sup>er</sup> janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1<sup>er</sup> janvier des années suivantes. La situation peut être modélisée par une suite  $(u_n)$  admettant pour premier terme  $u_0 = 115$ , le terme  $u_n$  donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année 2013 +  $n$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1<sup>er</sup> janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
  - a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2013 +  $n$ .  
Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

<b>Variables :</b> U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers <b>Début</b> Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire   Affecter $0,6 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U <b>Fin</b>
---

algorithme 1

<b>Variables :</b> U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers <b>Début</b> Saisir une valeur pour N Pour i de 1 à N faire   Affecter 115 à U   Affecter $0,4 \times U + 115$ à U Fin Pour Afficher U <b>Fin</b>
---

algorithme 2

<b>Variables :</b> U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers <b>Début</b> Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire   Affecter $0,4 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U <b>Fin</b>
---

algorithme 3

- b) Donner, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 200$ .
    - a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser  $v_0$ .
    - b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ .
    - c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$ .
    - d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
  4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1<sup>er</sup> janvier.

Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1<sup>er</sup> janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

### EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes.

#### Partie A

Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.

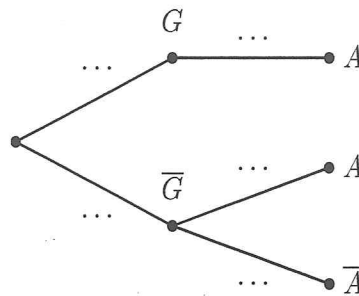
On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.

Si le salarié n'est pas grippé cette semaine là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.

On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les évènements suivants :

- $G$  : le salarié a la grippe une semaine donnée ;
- $A$  : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.



2. Montrer que la probabilité  $P(A)$  de l'évènement  $A$  est égale à 0,1072.
3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent. Donner un résultat arrondi au millième.

#### Partie B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale de moyenne  $\mu = 14$  et d'écart type  $\sigma = 3,5$ .

1. Justifier, en utilisant un résultat du cours, que  $P(7 \leq X \leq 21) \approx 0,95$ .
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année.

#### Partie C

Une mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013.

Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle.

Parmi celle-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013.

Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle ? Justifier la réponse.

On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation.

## EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.

Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $I = [0 ; 3]$  par  $f(x) = 10x^2 - 20x \ln x$ .

Lorsque  $x$  représente le nombre de centaines de litres de sorbet,  $f(x)$  est le coût total de fabrication en centaines d'euros.

La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction  $r$  définie sur le même intervalle  $I$ .

### Partie A

La courbe  $C$  représentative de la fonction  $f$  et la droite  $D$  représentative de la fonction linéaire  $r$  sont données en **annexe**.

- Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.
  - Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
  - Donner l'expression de  $r(x)$  en fonction de  $x$ .
  - Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégager un bénéfice ?
- On admet que  $\int_1^3 20x \ln x dx = 90 \ln 3 - 40$ 
  - En déduire la valeur de  $\int_1^3 f(x) dx$ .
  - En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

### Partie B

On note  $B(x)$  le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de  $x$  centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 3]$ , on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où  $B(x)$  est exprimé en centaines d'euros.

- On note  $B'$  la fonction dérivée de la fonction  $B$ .  
Montrer que, pour tout nombre  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 3]$ , on a :  $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$ .
- On donne le tableau de variation de la fonction dérivée  $B'$  sur l'intervalle  $[1 ; 3]$ .

$x$	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$	$B'(3)$

- Montrer que l'équation  $B'(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1 ; 3]$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$ .
  - En déduire le signe de  $B'(x)$  sur l'intervalle  $[1 ; 3]$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $B$  sur ce même intervalle.
- L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

# ANNEXE

## Annexe à l'exercice 4

