

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2013

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le
texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète
ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.

On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012 + n .

On a donc $U_0 = 40\,000$.

On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9\,600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées ; une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1) La valeur de U_1 est :

- a) 6 200 b) 35 000 c) 36 200 d) 46 200

2) La suite (V_n) est :

- a) géométrique de raison $-12,5\%$ c) géométrique de raison $-0,875$
b) géométrique de raison $0,875$ d) arithmétique de raison $-9\,600$

3) La suite (U_n) a pour limite :

- a) $+\infty$ b) 0 c) 1 200 d) 9 600

4) On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :  
    U, N  
Initialisation :  
    U prend la valeur 40 000  
    N prend la valeur 0  
Traitement :  
    Tant que U > 10 000  
        N prend la valeur N + 1  
        U prend la valeur 0,875 × U + 1 200  
    Fin du Tant que  
Sortie :  
    Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :

- a) la valeur de $U_{40\,000}$ c) le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leq 10\,000$
b) toutes les valeurs de U_0 à U_N d) le nombre de termes inférieurs à 1 200

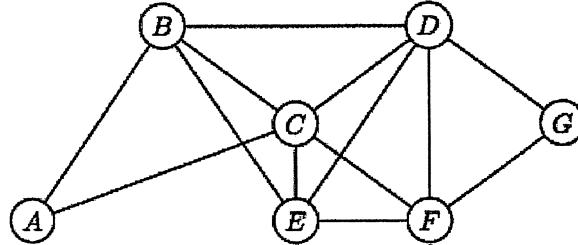
5) La valeur affichée est :

- a) 33 b) 34 c) 9 600 d) 9 970,8

EXERCICE 2 (5 points)

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



1) Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

2) a) Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

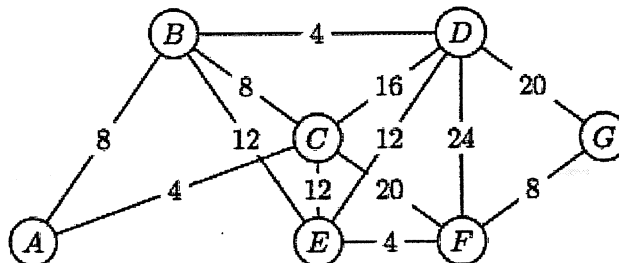
b) On donne la matrice $M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

3) Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie. Montrer qu'un tel parcours est possible.

4) Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G .

a) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2 ; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2 ; 8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

2) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2 ; 8]$.

b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2 ; 8]$.

3) On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2 ; 8]$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; 8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

a) Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8 ; 8]$.

b) Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4) On considère la fonction F définie sur $[2 ; 8]$ par :

$$F(x) = -x + 10 \ln x + \frac{16}{x}$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur $[2 ; 8]$.

b) Calculer $I = \int_2^8 f(x) dx$.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1) Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20 ; 120]$.

- a) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
- b) Calculer l'espérance mathématique de D . Interpréter ce résultat.

2) L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 400)$.

- a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J .
- b) Montrer l'équivalence :

$$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J - 120}{20} < 3$$

c) On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J - 120}{20}$.

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X .

d) Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.