

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 7

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 - 4 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

- 1) On choisit au hasard un réel de l'intervalle $[-2; 5]$.

Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[-1; 1]$?

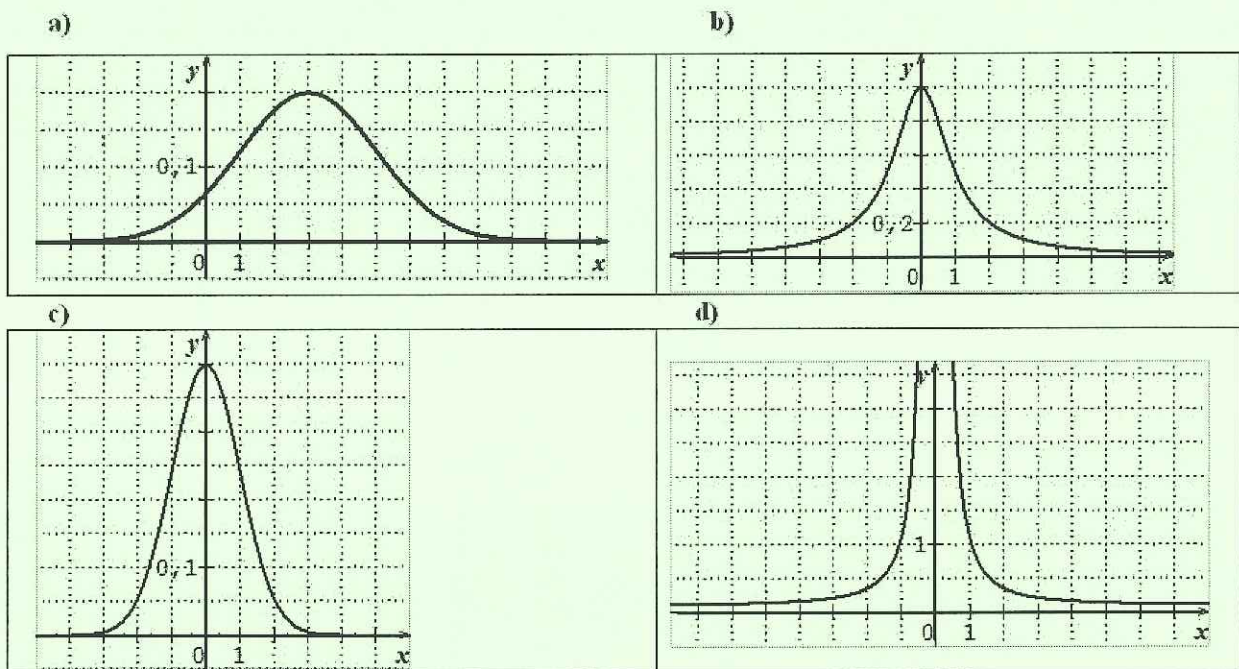
- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 0,7

- 2) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 3 et d'écart type 2.

Quelle est la valeur arrondie au centième de la probabilité $P(X \leq 1)$?

- a) 0,16 b) 0,68 c) 0,95 d) 0,99

- 3) Quelle courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale $N(0,1)$?



- 4) Lors d'un sondage avant une élection, on interroge 800 personnes (constituant un échantillon représentatif). 424 d'entre elles déclarent qu'elles voteront pour le candidat H.

Soit p la proportion d'électeurs de la population qui comptent voter pour H.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion p ?

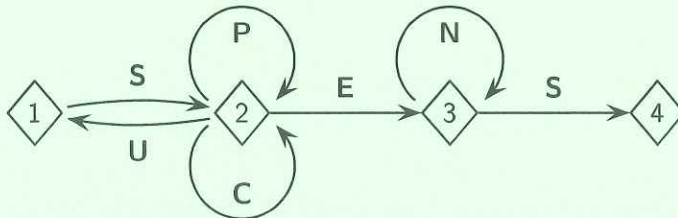
- a) $[0,46; 0,60]$ b) $[0,48; 0,58]$ c) $[0,49; 0,57]$ d) $[0,51; 0,55]$

Exercice 2 - 5 points

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

- 1) Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

SUCCES

SCENES

SUSPENS

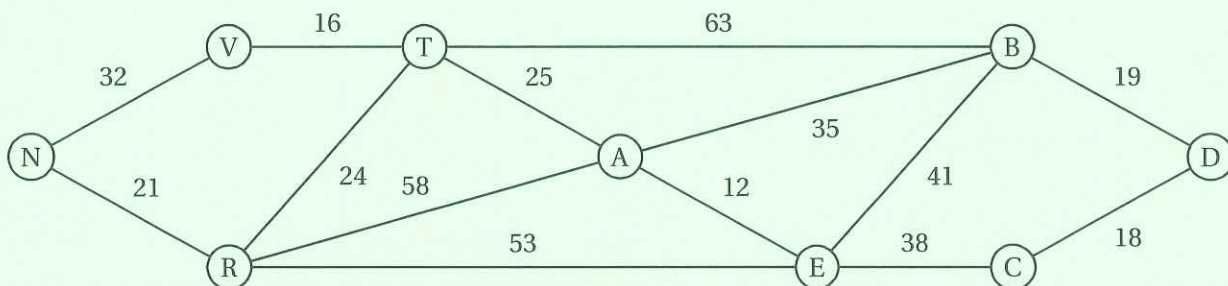
- 2) Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

- 3) Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.

Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise

B : Blois

C : Cheverny

D : Chambord

E : Chenonceau

T : Tours

V : Villandry

R : Azay-le-Rideau

N : Chinon

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

- Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
- Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

Exercice 3 - 6 points

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.

Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

- 1) Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012
- 2) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 210$.
On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n) .

| | A | B |
|---|---|-------|
| 1 | n | u_n |
| 2 | 0 | 600 |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | |
| 6 | 4 | |
| 7 | 5 | |
| 8 | 6 | |
| 9 | 7 | |

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule «tirée vers le bas» dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n) .

- 3) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.
Préciser son premier terme.
 - b) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n = 700 - 100 \times 0,7^n$.
- 4) a) Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n \geq 697$ est équivalent à $0,7^n \leq 0,03$.
b) Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

| | |
|-------------------------|---|
| Variables : | N est un nombre entier naturel |
| Initialisation : | Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 1 |
| Traitement : | Tant que $U > 0,03$ Affecter à N la valeur $N + 1$. Affecter à U la valeur $0,7 \times U$. Fin du Tant que |
| Sortie : | Afficher N . |

Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? (On fera tourner l'algorithme).

- c) Retrouvez ce résultat en résolvant l'inéquation $0,7^n \leq 0,03$.
- d) En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n) , déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

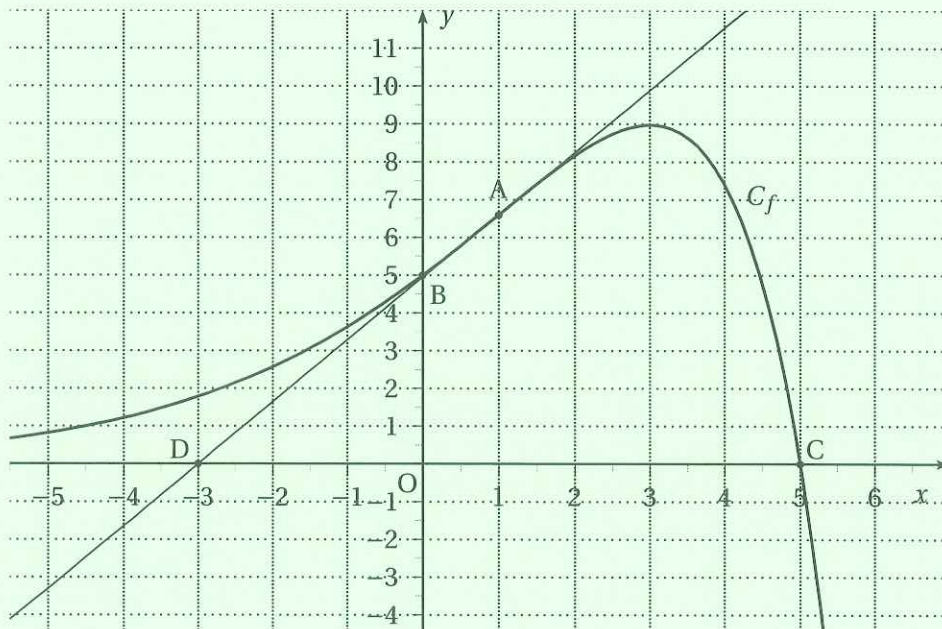
Exercice 4 - 5 points

La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

Elle passe par les points $A(1; 4e^{0,5})$, $B(0; 5)$ et $C(5; 0)$.

Le point $D(-3; 0)$ appartient à la tangente à C_f au point A .

On note f' la fonction dérivée de f sur \mathbf{R} .



Partie A - Par lecture graphique

- 1) Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
- 2) Que semble représenter le point A pour la courbe C_f ?
- 3)
 - a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \int_0^3 f(x)dx$ unités d'aires.
 - b) Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :
 $0 \leq I \leq 9$ $10 \leq I \leq 12$ $20 \leq I \leq 24$

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x , $f(x) = (-x + 5)e^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5 - 0,5x)e^{0,5x}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur \mathbf{R} .

- 1)
 - a) Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = 0,25(-x + 1)e^{0,5x}$.
 - b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe C_f .
 - c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe? Justifier.
- 2) Soit F la fonction définie, pour tout réel x , par $F(x) = (-2x + 14)e^{0,5x}$. On admet que F est une primitive de f sur \mathbf{R} .
 Calculer $I = \int_0^3 f(x)dx$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

