BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2012

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

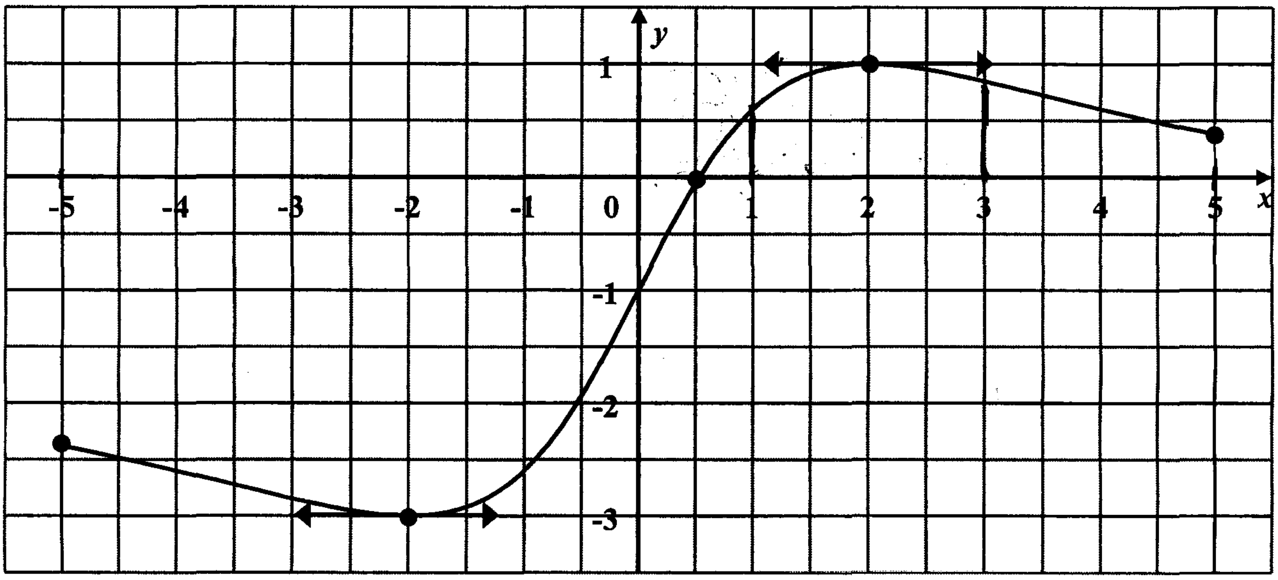
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Pour chaque question, indiquer par a), b), c) l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On considère la représentation graphique ci-dessous d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ telle que :

- f s'annule en $x = 0{,}5$.
- La courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2 et une tangente horizontale au point d'abscisse 2.



On notera f' la fonction dérivée de f.

1) Sur $[-5\ ;\ 5]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement :

a) 0 solution **b)** 1 solution **c)** 2 solutions

2) Sur $[-5\ ;\ 5]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

a) $[-2\ ;\ 2]$ **b)** $[0\ ;\ 5]$ **c)** $[0{,}5\ ;\ 5]$

3) La fonction g telle que $g(x) = \ln(f(x))$ est définie sur :

a) $[-2\ ;\ 2]$ **b)** $]0\ ;\ 1]$ **c)** $]0{,}5\ ;\ 5]$

4) On note $S = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ alors :

a) $0 < S < 1$ **b)** $1 < S < 2$ **c)** $2 < S < 3$

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

1ère partie : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8$.

1) En écrivant que $f(x) = \mathrm{e}^x(x-1) - 8$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^x$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0 ; +\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0 ; +\infty[$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution a.

b) Montrer que $2{,}040 < a < 2{,}041$.

c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x sur $[0 ; +\infty[$.

5) a) Montrer que la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 8x$ est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

b) Calculer la valeur exacte de $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

2ème partie : Application à une situation économique

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0 ; 5]$.

La fonction f de la 1ère partie modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaines d'euros.

Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.

En utilisant les résultats de la 1ère partie, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1) À partir de combien d'objets produits, l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices ?

2) L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur $[3 ; 5]$ (on donnera le résultat arrondi à l'euro près).

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :

- une coloration naturelle à base de plantes qu'il appelle « couleur–soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu'il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :

- 40 % des clientes demandent une « couleur–soin »,
- parmi celles qui n'en veulent pas, 30 % demandent un « effet coup de soleil »,
- de plus, 24 % des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.

On notera C l'événement *« la cliente souhaite une "couleur–soin" »*.
On notera M l'événement *« la cliente souhaite un "effet coup de soleil" »*.

1) Calculer la probabilité de M sachant C notée P_C (M).

2) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.

3) Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur–soin », ni un « effet coup de soleil ».

4) Montrer que la probabilité de l'événement M est égale à 0,42.

5) Les événements C et M sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

6) Une « couleur–soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.

a) Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24			0,42

b) Donner l'espérance E de cette loi de probabilité.

c) *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15 % ?

EXERCICE 4 (5 points)

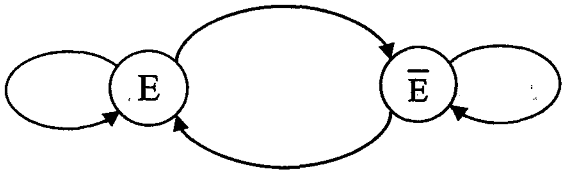
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.
Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\text{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.
On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.
On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1) Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2) Préciser la matrice de transition M telle que $(p_{n+1} \;\; q_{n+1}) = (p_n \;\; q_n)\text{M}$.

3) À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}8$.

4) Déterminer, par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (du type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$:

1) Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2) Préciser la matrice de transition N telle que $(p_{n+1} \;\; q_{n+1}) = (p_n \;\; q_n)\text{N}$.

3) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}9\, p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

4) Exprimer p_n en fonction de n.

5) Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}5$.

6) Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.