BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2012

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population du Nigeria, en millions d'habitants.

	1960	**1965**	**1970**	**1975**	**1980**	**1985**	**1990**	**1995**	**2000**	**2005**
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Population en millions (y_i)	45,148	50,414	56,467	63,948	74,523	85,151	97,338	110,449	124,842	140,879

Source : perspective monde, université de Sherbrooke. La banque mondiale

Partie A

1) Dans un premier temps, on décide de faire un ajustement affine. On note (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Déterminer en utilisant la calculatrice, une équation de (d). On arrondira les coefficients au millième.

2) À l'aide de cet ajustement, faire une estimation de la population du Nigeria en 2010.
On arrondira la réponse au millier d'habitants.

Partie B

Dans cette partie, toutes les valeurs seront arrondies au millième.

1) En 2010 on a noté une population de 154,729 millions d'habitants au Nigeria. On décide alors de faire un ajustement exponentiel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \ln(y_i)$										

2) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

3) En déduire une expression de la population du Nigeria y en millions d'habitants en fonction du rang de l'année x sous la forme $y = k\,\mathrm{e}^{mx}$.

4) Utiliser cet ajustement pour estimer la population du Nigeria en 2010.

5) D'après l'Institut National d'Etudes Démographiques (INED) la population du Nigeria devrait dépasser 430 millions d'habitants en 2050. Que peut-on penser de cette estimation ?

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80 % des adhérents ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.

On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.

On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.

Enfin on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1) Déterminer P_0.

2) Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

3) Ecrire la matrice de transition M associée à cette situation.

4) Déterminer la matrice P_2. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.

5) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0{,}6\, a_n + 0{,}1$.

6) Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4\, a_n - 1$.

Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.

7) Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.

8) Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

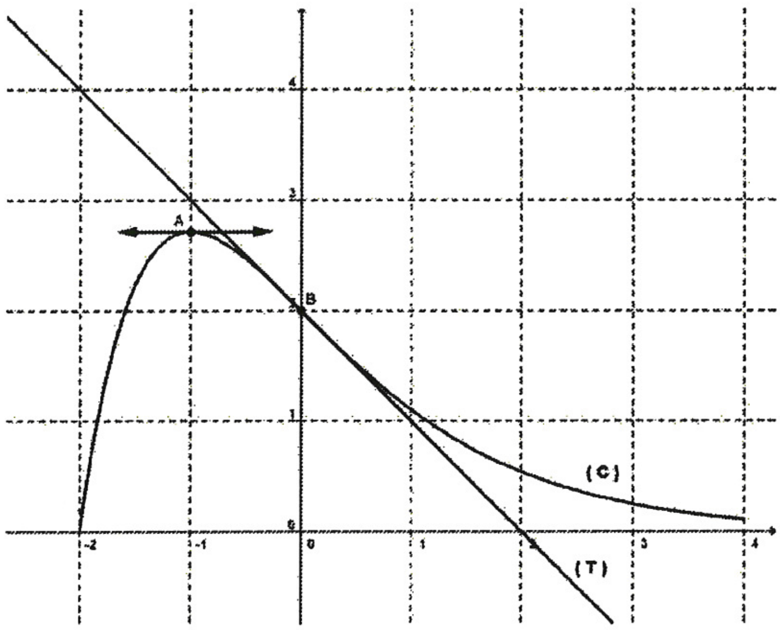
EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative (C) d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;4]$.
On nomme A le point de (C) d'abscisse -1 et B le point de (C) d'abscisse 0.

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;4]$.
- La tangente à (C) au point A est horizontale.
- La droite (T) est la tangente à (C) au point B et a pour équation $y = -x + 2$



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1) a) Donner la valeur de $f'(-1)$.

b) Déterminer le signe de $f'(2)$.

c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.

2) Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exprimée en unités d'aire.

Partie B

La fonction f de la **partie A** a pour expression $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

1) Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A de la courbe (C).

2) Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2;4]$.

3) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $F(x) = (-x-3)\,e^{-x}$ est une primitive de f.

4) a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

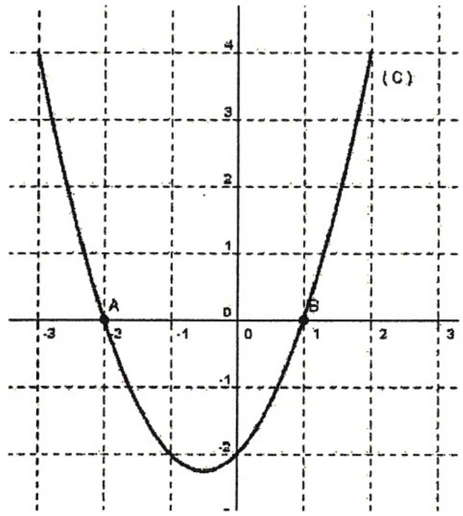
b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question **2)** de la partie A.

EXERCICE 4 (3 points)

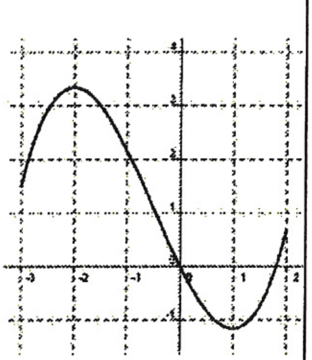
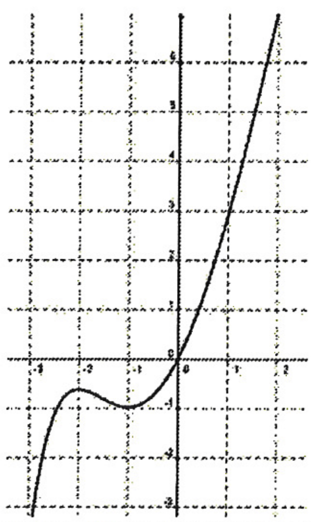
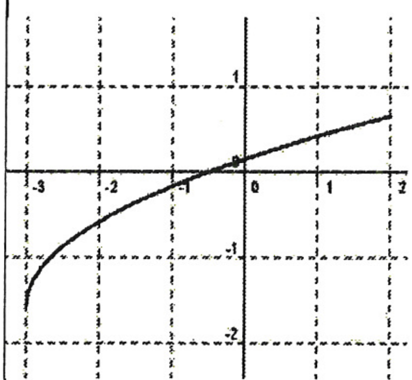
Commun à tous les candidats

<u>Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes</u>

1) On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe (C) d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;2]$. La courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse -2 et au point B d'abscisse 1.



Parmi les trois courbes proposées ci-dessous, déterminer la seule qui représente une primitive de f sur l'intervalle $[-3;2]$. Justifier la réponse.

(a)	(b)	(c)
		

2) On admet que l'équation $x\,\mathrm{e}^{2x-1} = 2$ n'a qu'une seule solution α dans **R**.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*

Une entreprise produit des tentes. Le coût marginal, en milliers d'euros, pour la production de x centaines de tentes, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$ est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;20]$ par

$$f(x) = \frac{2}{x+1}.$$

On note C la fonction qui représente le coût total exprimé en milliers d'euros pour une production de x centaines de tentes, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.

On assimile le coût marginal à la dérivée de la fonction coût total, c'est-à-dire à la dérivée de la fonction C.

Sachant que les coûts fixes sont de 5000 euros, déterminer le coût total en milliers d'euros, pour une production de x centaines de tentes, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.