Liban

Exercice 1

1) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Or $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$ car A et B sont indépendants.

D'où $p(A \cup B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$
La réponse correcte est donc la B.

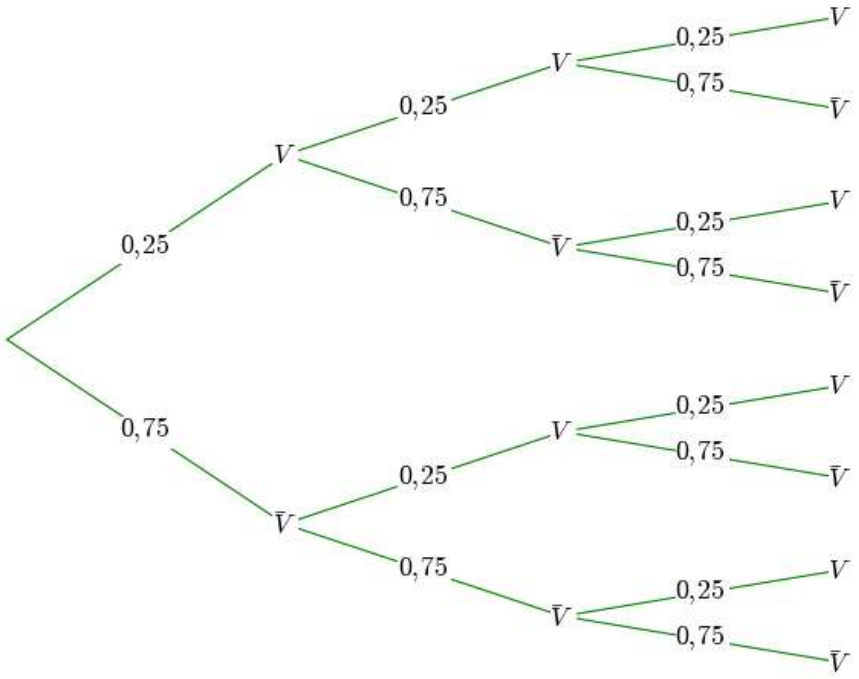
2) Soit S l'événement : « le cahier a une reliure spirale »
Soit C l'événement : « la cahier a des grands carreaux ».

	C	$\overline{C}$	Total
S	**30 %**	**20 %**	50 %
$\overline{S}$	**45 %**	**5 %**	**50 %**
Total	75%	**25 %**	100 %

Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale. Or $\frac{40}{100} \times 75 = 30$.
Donc la probabilité que le cahier soit à grands carreaux sachant qu'il a une reliure spirale est égale à $p_S(C) = \frac{p(S \cap C)}{p(S)} = \frac{30}{50} = 0,6$. **La réponse correcte est donc la C**.

3) Soit V l'événement : « tirer un stylo-feutre vert ». La variable aléatoire comptant le nombre de stylos-feutres verts prélevés suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(3\ ;\ 0,25)$.
La probabilité de ne prélever aucun stylo-feutre vert est égale à $(0,75)^3$.
Par conséquent, la probabilité de prélever au moins un stylo-feutre vert est égale à $1-(0,75)^3 \approx 0,578$. **La réponse correcte est donc la C**.

4) D'après l'arbre pondéré suivant, la probabilité qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à $3 \times (0,25)^2 \times (0,75) \approx 0,141$. **La réponse correcte est donc la C**.



Exercice 2

1) a) Comme $\mathscr{C}$ passe par le point $E(0\ ;\ 6)$, alors $\boldsymbol{g(0)=6}$.

b) $g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en E.

Alors $\boldsymbol{g'(0)}=\dfrac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\dfrac{0-6}{3-0}\boldsymbol{=-2}$.

c) On remarque que $g=u+k\mathrm{e}^v$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=ax$.

Alors $g'=u'+k\left(\mathrm{e}^v\right)'=u'+kv'\mathrm{e}^v$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=a$. Donc $\boldsymbol{g'(x)=1+ka\,\mathrm{e}^{ax}}$.

d) Comme $g(0)=6$, alors $0+k\mathrm{e}^0=6$, c'est-à-dire $\boldsymbol{k=6}$.

Comme $g'(0)=-2$, alors $1+ka\ \mathrm{e}^0=-2$, c'est-à-dire $1+6a=-2$. D'où $\boldsymbol{a}=\dfrac{-2-1}{6}\boldsymbol{=-0,5}$.

2) $g(x)-x=6\mathrm{e}^{-0,5x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-0,5x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-0,5x}=0$ (limite d'une fonction composée).

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=0$. On en déduit que **la droite *D* d'équation $\boldsymbol{y=x}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $\boldsymbol{+\infty}$**.

3) a) Voir ci-dessous.

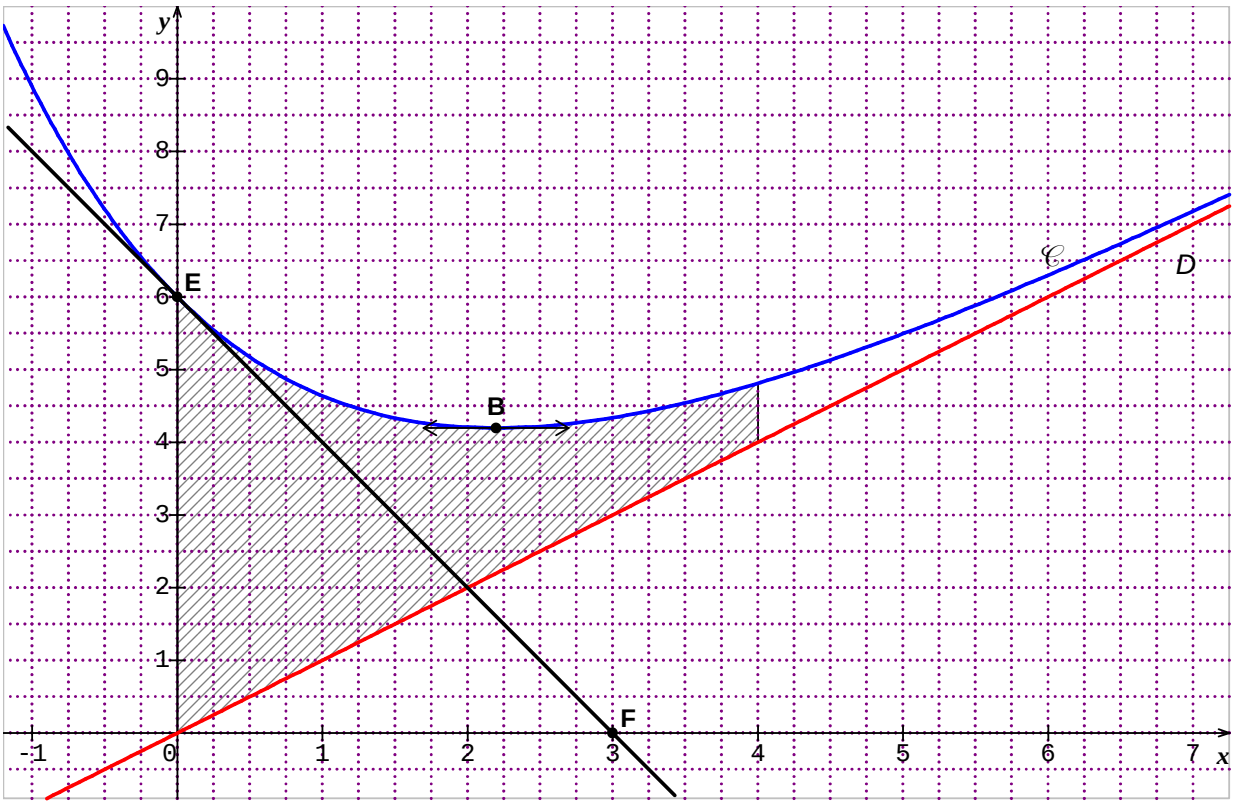
b) Comme $\mathscr{C}$ est située au-dessus de *D*, alors l'aire $\mathscr{A}$ du domaine *S* est égale à $\int_0^4\left[g(x)-x\right]dx$ u.a. Or 1 u.a. est égale à 2×1 cm^2 et $g(x)-x=6\mathrm{e}^{-0,5x}$.

Alors $\mathscr{A}=2\int_0^4\left[6\mathrm{e}^{-0,5x}\right]dx=12\int_0^4\left[\mathrm{e}^{-0,5x}\right]dx$.

Si on pose $v(x)=-0,5x$, alors $v'(x)=-0,5$; par suite, $\mathrm{e}^{-0,5x}=\dfrac{1}{-0,5}v'(x)\mathrm{e}^{v(x)}=-2v'(x)\mathrm{e}^{v(x)}$.

Or une primitive de $v'e^{v}$ sur **R** est e^{v}. D'où :

$\mathscr{A} = -24\left[e^{-0,5x}\right]_0^4 = -24\left[e^{-2} - e^{0}\right] = \mathbf{24\left(1 - e^{-2}\right)\ cm^2 \approx 20,8\ cm^2}$.



4) Comme la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses, alors $g'(x_B) = 0$.

Or $g'(x_B) = 0$ équivaut à $1 - 3e^{-0,5x_B} = 0$ (d'après les questions 1) c) et 1) d)), c'est-à-dire à $e^{-0,5x_B} = \frac{1}{3}$. D'où $g'(x_B) = 0$ équivaut à $-0,5x_B = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$, ou encore à

$\boldsymbol{x_B} = \frac{-\ln(3)}{-0,5} = \mathbf{2\ln(3)}$

Exercice 3

Partie A

1) a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^2 - x\right) = 3e^2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty\end{array}\right\}$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^2 - x\right)\ln(x) = -\infty$ (par produit de limites).

Donc, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(3e^2 - x\right)\ln(x) + 10\right] = -\infty$. Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

b) $\boldsymbol{f\left(e^2\right)} = \left(3e^2 - e^2\right)\ln\left(e^2\right) + 10 = 2e^2 \times 2\ln(e) + 10 = \mathbf{4e^2 + 10 \approx 39,56}$.

On a $f = uv + 10$ avec $u(x) = 3e^2 - x$ et $v(x) = \ln(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ 20]$, et $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où $f'(x) = (-1)\times\ln(x) + \left(3e^2 - x\right)\times\dfrac{1}{x} = -\ln(x) + \dfrac{3e^2}{x} - \dfrac{x}{x}$.

Par conséquent, **pour tout x de $]0\ ;20]$, $f'(x) = -\ln(x) + \dfrac{3e^2}{x} - 1$.**

3) D'après le tableau de variations, on en déduit le signe de $f'(x)$:

x	0		e^2		20
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

c) On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e^2		20
f	‖ $-\infty$	↗	$4e^2 + 10$	↘	$f(20)$

$f(20) = \left(3e^2 - 20\right)\ln(20) + 10 \approx 16{,}49$

4) a) Comme la fonction f est continue, strictement croissante sur $[0{,}6\ ;\ 0{,}7]$, que $f(0{,}6) \approx -1{,}017$ et $f(0{,}7) \approx 2{,}343$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0{,}6\ ;\ 0{,}7]$**.
À l'aide de la calculatrice, **une valeur approchée de α à 0,001 par excès est 0,629**.

b) Comme la fonction f est strictement croissante sur $]0\ ;\ \alpha]$, alors pour tout x de $]0\ ;\ \alpha]$, $f(x)$ appartient à $\left]\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ ;\ f(\alpha)\right] =]-\infty\ ;\ 0]$.
Donc, **$f(x)$ est négatif pour tout x de $]0\ ;\ \alpha]$**.

Comme la fonction f est strictement croissante sur $\left[\alpha\ ;\ e^2\right]$, alors pour tout x de $\left[\alpha\ ;\ e^2\right]$, $f(x)$ appartient à $\left[f(\alpha)\ ;\ f\left(e^2\right)\right] = \left[0\ ;\ 4e^2 + 10\right]$.
De plus, pour tout x de $\left[e^2\ ;\ 20\right]$, $f(x)$ appartient à $\left[4e^2 + 10\ ;\ f(20)\right]$.
Donc, **$f(x)$ est positif pour tout x de $[\alpha\ ;20]$**.

Partie B

1) Le bénéfice est positif lorsque $f(x)$ est positif, c'est-à-dire dès que $x \geq \alpha$.

Or $0,629 \times 1000 = 629$. Donc **l'entreprise doit fabriquer au minimum 629 DVD pour que le bénéfice soit positif**.

2) D'après la partie A, la fonction f admet un maximum en $x = e^2$ et ce minimum est $4e^2 + 10$
Or $1000e^2 \approx 7389$ et $1000 \times \left(4e^2 + 10\right) \approx 39560$.

Il faut donc produire 7 389 DVD pour que le bénéfice soit maximal. Dans ce cas, le bénéfice réalisé est d'environ 39 560 euros.

Exercice 4 (enseignement obligatoire)

1) a) $\left(1+\frac{4,7}{100}\right)\times\left(1+\frac{10,6}{100}\right)\times\left(1+\frac{4,1}{100}\right)\times\left(1+\frac{5,8}{100}\right)\times\left(1+\frac{7,5}{100}\right)=1,371029092$.
Donc le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaire entre 2004 et 2008 est d'environ 37,10 %.

Soit t % le taux annuel moyen. Alors $\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 1,371029092$.

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 1,371029092 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} = (1,371029092)^{\frac{1}{5}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{t}{100} = (1,371029092)^{\frac{1}{5}} - 1$$
$$\Leftrightarrow t = 100\left[(1,371029092)^{\frac{1}{5}} - 1\right] \approx 6,5146$$

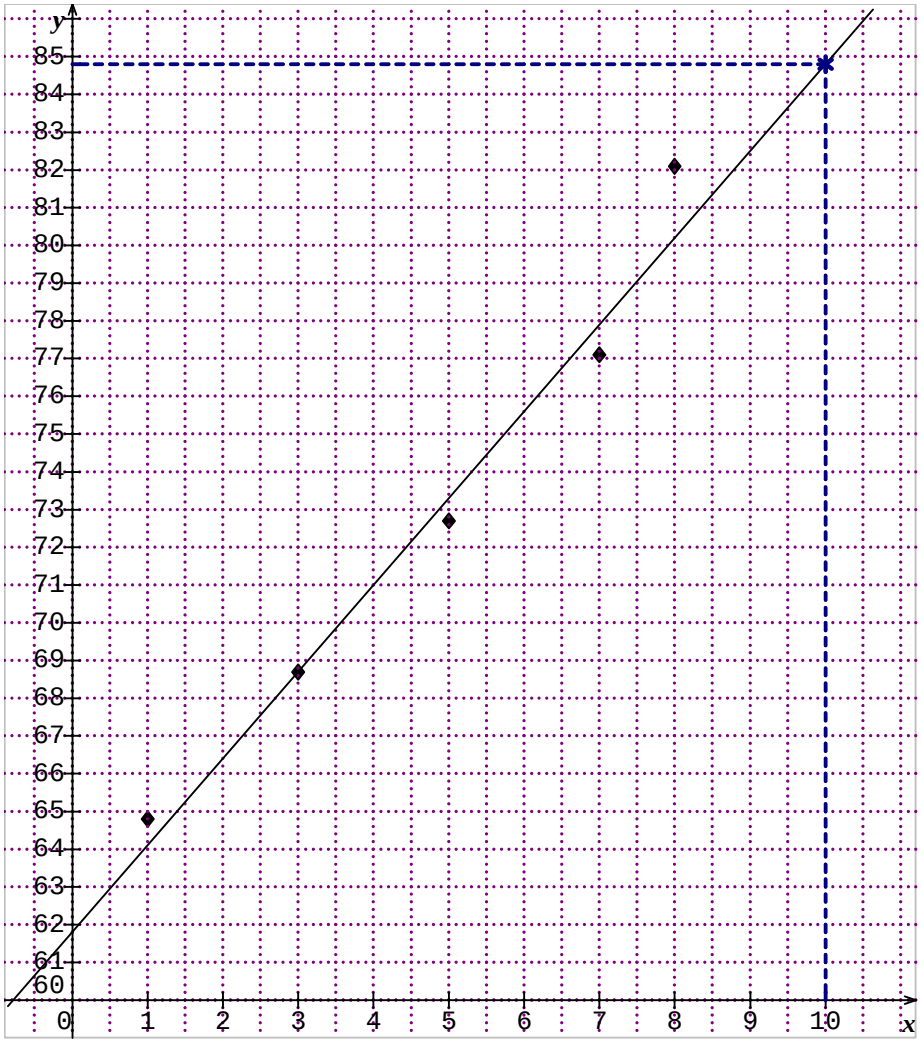
Le pourcentage d'augmentation annuel moyen de la production est à peu près 6,5 %.

b) $59,5 \times \left(1+\frac{6,5}{100}\right)^2 \approx 67,5$. **En utilisant ce pourcentage d'augmentation annuel moyen de 6,5 %, le chiffre d'affaire du groupe Enville serait d'environ 67,5 milliards d'euros en 2010**.

2) a) Voir ci-dessous.

b) **À l'aide de la calculatrice, la droite d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 2,3x + 61,8$**.

c) En 2010, le rang de l'année est 10. À l'aide du graphique, la production pour l'année 2010 correspond à l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 10. Cette ordonnée est environ 900.
Avec cet ajustement, on peut estimer qu'en 2010, le chiffre d'affaire du groupe Aupré serait d'environ 84,8 milliards d'euros.



3) a)

$$59,5\times1,065^n > 82,1\times1,03^n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1,065^n}{1,03^n} > \frac{82,1}{59,5} \quad \text{car } 59,5 \text{ et } 1,03^n \text{ sont strictement positifs}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1,065}{1,03}\right)^n > \frac{82,1}{59,5}$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln\left[\left(\frac{1,065}{1,03}\right)^n\right] > \ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad n\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right) > \ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad n > \frac{\ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right) \text{ est strictement positif}$$

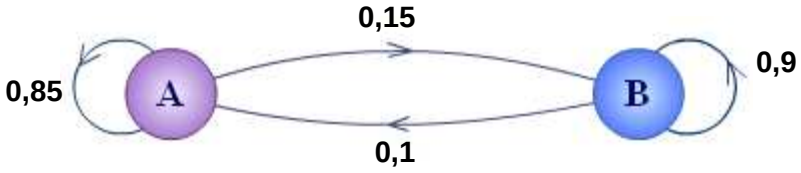
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathbf{59,5\times1,065^n > 82,1\times1,03^n}$ est $\left[\dfrac{\ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right)}\ ;+\infty\right[$.

b) $\dfrac{\ln\left(\dfrac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\dfrac{1,065}{1,03}\right)} \approx 9,6$. Donc **le chiffre d'affaire du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré à partir de 2018**.

Exercice 4 (enseignement de spécialité)

1) a) Soient A_n l'événement respectif : « le téléspectateur regarde la chaîne A la nième semaine » et B_n l'événement : « le téléspectateur regarde la chaîne B la nième semaine ».

Comme 15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante, alors $p_{A_n}\left(B_{n+1}\right)=0,15$. Par suite, $p_{A_n}\left(A_{n+1}\right)=1-0,15=0,85$.
Comme 10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante, alors $p_{B_n}\left(A_{n+1}\right)=0,1$. Par suite, $p_{B_n}\left(B_{n+1}\right)=1-0,1=0,9$.
On en déduit alors le graphe probabiliste suivant :



b) **La matrice de transition *M* de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre est** : $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{0,85} & \mathbf{0,15}\\ \mathbf{0,1} & \mathbf{0,9}\end{pmatrix}$.

2) En utilisant la calculatrice, on obtient que : $\boldsymbol{M^3}=\begin{pmatrix}\mathbf{0,653} & \mathbf{0,347}\\ \mathbf{0,231} & \mathbf{0,769}\end{pmatrix}$.

La matrice décrivant l'état probabiliste la quatrième semaine est $P_1\times M^3$.
Or $P_1\times M^3=\begin{pmatrix}0,7\times0,653+0,3\times0,231 & 0,7\times0,347+0,3\times0,769\end{pmatrix}$.
D'où $P_1\times M^3=\begin{pmatrix}0,5264 & 0,4736\end{pmatrix}$.
Par conséquent, **la quatrième semaine, 52,64 % des téléspectateurs regarderont la chaîne A et 47,36 % des téléspectateurs la chaîne B**.

3) a) $P=PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,85 & 0,15\\ 0,1 & 0,9\end{pmatrix}$ et $a+b=1$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,85a+0,1b & 0,15a+0,9b\end{pmatrix}$ et $a+b=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0,85a+0,1b=a\\ 0,15a+0,9b=b\\ a+b=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-0,15a+0,1b=0\\ 0,15a-0,1b=0\\ a+b=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1,5a-b=0\\ a+b=1\end{cases}$$

Donc a et b sont solutions du système $\begin{cases} 1{,}5a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} 1{,}5a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5a = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5a = \dfrac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \\ b = 1 - a = 0{,}6 \end{cases}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{P = PM}$ lorsque $\boldsymbol{a = 0{,}4}$ et $\boldsymbol{b = 0{,}6}$.

b) Comme les coefficients de la matrice de transition M du graphe probabiliste d'ordre 2 ne sont pas nuls et que $P = PM$, alors l'état probabiliste converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ indépendant de l'état initial.
À long terme, d'une semaine à l'autre, 40 % des téléspectateurs choisiront la chaîne A et 60 % des téléspectateurs la chaîne B.

4) a) $a_n < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}4 + 0{,}3 \times \left(0{,}75^{n-1}\right) < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3 \times \left(0{,}75^{n-1}\right) < 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}75^{n-1} < \dfrac{0{,}1}{0{,}3}$

Alors $a_n < 0{,}5 \Leftrightarrow \ln\left(0{,}75^{n-1}\right) < \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln(0{,}75) < -\ln(3)$.

Comme $\ln(0{,}75) < 0$, alors $a_n < 0{,}5 \Leftrightarrow n - 1 > -\dfrac{\ln(3)}{\ln(0{,}75)} \Leftrightarrow n > -\dfrac{\ln(3)}{\ln(0{,}75)} + 1$.

Or $-\dfrac{\ln(3)}{\ln(0{,}75)} + 1 \approx 4{,}8$; par suite, **l'inéquation $\boldsymbol{a_n < 0{,}5}$ a pour solutions les entiers naturels supérieurs ou égaux à 5**.

b) Résolvons l'inéquation $b_n > a_n$. Or $b_n = 1 - a_n$, d'où : $b_n > a_n$ équivaut à $1 - a_n > a_n$, c'est-à-dire à $a_n < 0{,}5$.
D'après la question précédente, **l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera celle de l'émission de la chaîne A à partir de la 5ème semaine**.