Amérique du Nord

1. *Exercice 1*

1) Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 20 % est égal à $1+\frac{20}{100}=1,2$.

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 30 % est égal à $1+\frac{30}{100}=1,3$.

Donc le coefficient multiplicateur associé à des deux hausses successives est égal à $1,3\times1,2$, c'est-à-dire à 1,56.
Le prix de l'article a donc augmenté globalement de 56 %.
La réponse correcte est donc la C.

2) $\frac{\ln(\mathrm{e})}{\ln(\mathrm{e}^2)}=\frac{\ln(\mathrm{e})}{2\ln(\mathrm{e})}=\frac{1}{2}$. **La réponse correcte est donc la C**.

3) $\mathrm{e}^{-3\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln(2^{-3})}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$. **La réponse correcte est donc la B**.

4) Si on pose $u(x)=-2x$, alors $u'(x)=-2$.

On peut alors écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=\frac{1}{-2}\times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Or une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u, alors une primitive F de f sur **R** est définie par
$F(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. **La réponse correcte est donc la A**.

5) Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est de la forme $y=\exp'(0)(x-0)+\exp(0)$.

Or $\exp'(x)=\exp(x)$ et $\exp(0)=\mathrm{e}^0=1$. Alors cette tangente a pour équation $y=x+1$.
La réponse correcte est donc la A.

6) $f(x)$ existe si, et seulement si, $\mathrm{e}^x-1\neq0$.

Or $\mathrm{e}^x-1\neq0 \iff \mathrm{e}^x\neq1 \iff \mathrm{e}^x\neq\mathrm{e}^0 \iff x\neq0$.
La réponse correcte est donc la B.

7) $f(x)=2x-1+\frac{1}{2x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$, alors la droite d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
La réponse correcte est donc la C.

8) Les solutions de l'équation $\ln x=x^2-2$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentant la fonction ln et la fonction *f*. D'après la graphique, il existe deux points d'intersections dont les abscisses appartiennent à l'intervalle $]0\ ;\ 2[$.

La réponse correcte est donc la C.

2. Exercice 2

1) $f_V = \frac{179}{500} = \mathbf{0,358}$; $f_P = \frac{133}{500} = \mathbf{0,266}$ et $f_M = \frac{188}{500} = \mathbf{0,376}$.

2) $500d^2_{\text{obs}} = 500 \times \left[\left(0,358 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0,266 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0,376 - \frac{1}{3}\right)^2 \right]$.

Donc $\mathbf{500d^2_{\text{obs}} \approx 3,481}$.

3)

Intervalle auquel appartient	[0 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[
Nombre par intervalle	163	439	458	350	231	161	80	47	37	34
Effectifs cumulés croissants	163	602	1060	1410	1641	1802	1882	1929	1966	2000

Le neuvième décile D_9 est la valeur de la série telle que 90 % de la population lui soit inférieure ou égale. Or $\frac{9}{10} \times N = 1800$, alors $\mathbf{D_9 \in [2,5\ ;3[}$.

4) Comme $500d^2_{\text{obs}} > D_9$, alors **on ne peut pas affirmer que la prairie soit composée d'autant de fleurs de chaque variété avec un risque inférieur à 10 %**.

3. Exercice 3 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

1) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $\mathbf{y = 0,8x + 47,2}$.

2) Le mois de décembre 2009 correspond au rang 12. En remplaçant x par 12 dans l'équation précédente, on obtient : $y = 0,8 \times 12 + 47,2 = 56,8 \approx 57$.
Avec cet ajustement, on peut prévoir 57 prêts automobiles pour le mois de décembre 2009.

Partie B

20 % des prêts sont souscrits dans l'agence A, alors $p(A) = \frac{20}{100} = 0,2$.

45 % des prêts sont souscrits dans l'agence B, alors $p(B) = \frac{45}{100} = 0,45$.

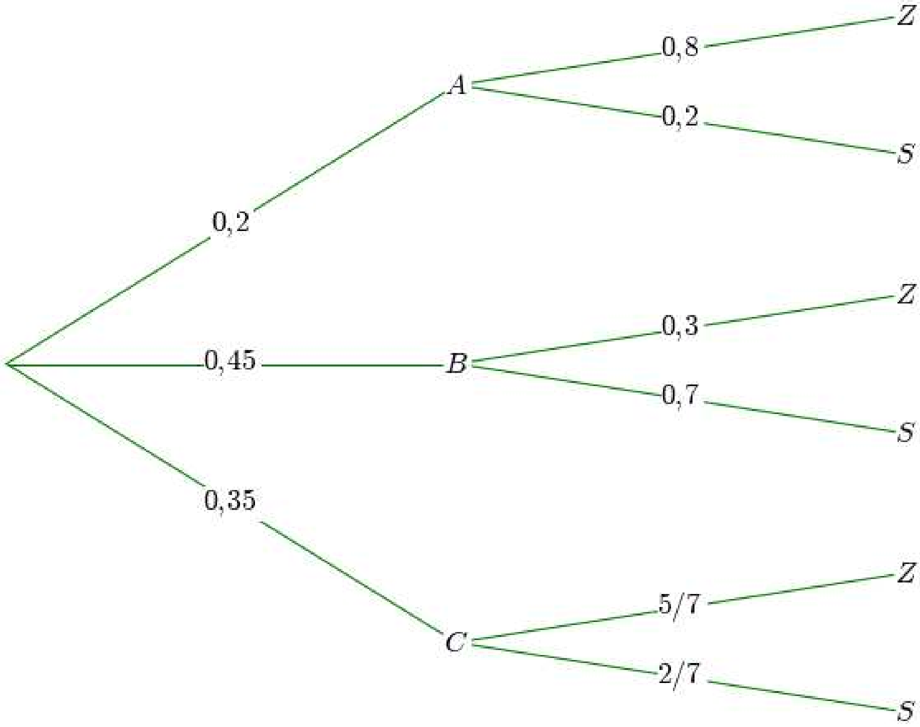
On en déduit que $p(C) = 1 - 0,2 - 0,45 = 0,35$.

80 % des clients de l'agence A ayant souscrit un prêt automobile, souscrivent une assurance *Zen*. Alors $p_A(Z) = \frac{80}{100} = 0,8$; par suite, $p_A(S) = 1 - 0,8 = 0,2$.

30 % des clients de l'agence B ayant souscrit un prêt automobile, souscrivent une assurance *Zen*. Alors $p_B(Z) = \frac{30}{100} = 0,3$; par suite, $p_B(S) = 1 - 0,3 = 0,7$.

$\frac{2}{7}$ des clients de l'agence C ayant souscrit un prêt automobile, souscrivent une assurance *Speed*. Alors $p_C(S)=\frac{2}{7}$; par suite, $p_C(Z)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.

1) On peut modéliser l'expérience par l'arbre pondéré suivant :



2) Déterminer la probabilité que le client interrogé ait souscrit un prêt automobile avec une assurance *Zen* dans l'agence A revient à chercher $p(A\cap Z)$.

Or $p(A\cap Z)=p(A)\times p_A(Z)=0,2\times 0,8=0,16$.

Donc **la probabilité que le client interrogé ait souscrit un prêt automobile avec une assurance *Zen* dans l'agence A est égale à 0,16**.

3) A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :
$p(A)=p(A\cap Z)+p(B\cap Z)+p(C\cap Z)=0,16+p(B)\times p_B(Z)+p(C)\times p_C(Z)$.

Alors $p(A)=0,16+0,45\times 0,3+0,35\times\frac{5}{7}=0,16+0,135+0,25=0,545$.

Donc **la probabilité de l'événement Z est égale à 0,545**.

4) On est amené à chercher $p_Z(C)$. Or $p_Z(C)=\frac{p(C\cap Z)}{p(Z)}=\frac{0,25}{0,545}=\frac{250}{545}=\frac{250}{545}=\frac{50}{109}$.

Donc **la probabilité que le prêt soit souscrit dans l'agence C sachant que le client ait souscrit une assurance *Zen* est égale à $\frac{50}{109}$**.

4. Exercice 3 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1) a)

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe	**2**	**4**	**4**	**5**	**3**	**4**

b) Lorsque, pour chaque paire de sommets d'un graphe, il existe une chaîne reliant les deux sommets, le graphe est connexe.

La matrice associé au graphe est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; comme cette matrice ne contient aucun terme nul, il est possible de joindre deux sommets quelconques par au moins une chaîne de longueur 2. On en conclut que **ce graphe est connexe**.

2) Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin. On remarque que ce graphe ne possède que deux sommets de degré impair (F et N) ; alors, d'après le théorème d'Euler, il admet au moins une chaine eulérienne.
Par conséquent, **le souhait du groupe est réalisable**.
Un exemple de trajet possible est : F – N – T – F – B – C – D – F – C – T – D – N.

3) a) Le plus grand degré d'un sommet est 5 ; donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 6.
FCDT est un sous-graphe complet d'ordre 4. Donc, le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4.
Par conséquent, **le nombre chromatique *n* est compris entre 4 et 6**.

b)

Sommets	F	C	D	T	N	B
Degré des sommets du graphe	5	4	4	4	3	2
Numéro de couleur	❶	❷	❸	❹	❷	❸

Donc **le nombre chromatique de ce graphe est 4**.

4) On utilise l'algorithme de Dijkstra :

B	C	D	F	T	N	Sommet fixé
0	12 (B)	$+\infty$	15 (B)	$+\infty$	$+\infty$	**B**
	12 (B)	14 (C)	15 (B)	17 (C)	$+\infty$	**C**
		14 (C)	15 (B)	17 (C)	26 (D)	**D**
			15 (B)	17 (C)	26 (D)	**F**
				17 (C)	24 (T)	**T**
					24 (T)	**N**

En remontant, on suit l'itinéraire en remontant : N – T – C – B.

Par conséquent, **un chemin qui minimise la distance du trajet est B – C – T – N, et cette distance est de 24 kilomètres**.

5. Exercice 4

Préliminaires

1) On remarque que $g = 6u + v$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = -2x^3 - 3$.
La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables.

Alors $g' = 6u' + v'$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = -6x^2$.

Donc $\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{6}{x} - 6x^2}$**, pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{]0\ ;+\infty[}$**.

2) D'après la question précédente et le tableau de signes de la fonction $x \mapsto \dfrac{6}{x} - 6x^2$ (donné dans l'énoncé), on en déduit que :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Par conséquent, **la fonction $\boldsymbol{g}$ est croissante sur $\boldsymbol{]0\ ;1]}$ et décroissante sur $\boldsymbol{[1\ ;+\infty[}$**.

3) D'après la question 2), la fonction g admet un maximum $g(1)$ atteint en $x = 1$.
Or $g(1) = 6\ln(1) - 2\times 1^3 - 3 = 0 - 5 = -5$. Par conséquent, $\boldsymbol{g(x) < 0}$ **pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{]0\ ;+\infty[}$**.

Partie A

1) $\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{aligned}\right\}$ alors, par somme de limites, $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0^+\end{array}\right\}\text{ alors, par quotient de limites, } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=-\infty$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0$; d'où, par somme de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$.

2) a) On remarque $f=u+\frac{3}{2}\times\frac{v}{w}$ avec $u(x)=x$; $v(x)=\ln x$ et $w(x)=x^2$.

Alors $f'=u'+\frac{3}{2}\times\frac{v'w-vw'}{w^2}$ avec $u'(x)=1$; $v'(x)=\frac{1}{x}$ et $w'(x)=2x$.

D'où : $f'(x)=1+\frac{3}{2}\times\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}=1+\frac{3}{2}\times\frac{x-2x\ln x}{x^4}=1+\frac{3}{2}\times\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{2x^3+3-2\ln x}{2x^3}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{f'(x)=-\frac{g(x)}{2x^3}}$, **pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{]0\,;+\infty[}$**.

b) Comme x appartient à $]0\,;+\infty[$, alors $2x^3>0$. On en déduit que le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-g(x)$.

D'après la question 3) des préliminaires, $g(x)<0$ pour tout réel x strictement positif.

Donc, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)>0$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
f	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Partie B

1) On remarque $F=u-\frac{3}{2}\times\frac{v}{w}$ avec $u(x)=\frac{1}{2}x^2$; $v(x)=1+\ln x$ et $w(x)=x$.

Alors $F'=u'-\frac{3}{2}\times\frac{v'w-vw'}{w^2}$ avec $u'(x)=x$; $v'(x)=\frac{1}{x}$ et $w'(x)=1$.

D'où : $F'(x)=x-\frac{3}{2}\times\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)}{x^2}=x-\frac{3}{2}\times\frac{1-(1+\ln x)}{x^2}=x+\frac{3}{2}\times\frac{\ln x}{x^2}=f(x)$.

Par conséquent, ***F* est une primitive de *f* sur $\boldsymbol{]0\,;+\infty[}$**.

2) Comme f est continue et positive sur $[1\,;\mathrm{e}]$, l'aire de ce domaine, en unité d'aire, est égale à $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx$.

Or $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^{\mathrm{e}}=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{3}{2}\times\frac{1+\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}\right)-\left(\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{3}{2}\times\frac{1+\ln(1)}{1}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{3}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$.

Par conséquent, **l'aire de ce domaine est égale à** $\mathbf{\frac{e^2}{2} - \frac{3}{e} + 1}$**, c'est-à-dire à environ 3,59 unités d'aire**.