| SUITE DE MATRICES ET CONVERGENCE | |
|---|---|
| ***Cours*** | ***Terminale S*** |

# 1. Suite de matrices colonnes

### *1) Exemples*

● **Exemple 1** : La suite $(U_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $U_n = \begin{pmatrix} n^3+1 \\ 3n+5 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par $u_n = n^3+1$ et $v_n = 3n+5$ $u_n = n^2$ et $v_n = 3n+1$.

● **Exemple 2** : Soit deux suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par : $u_0 = 0{,}05$ , $v_0 = 0{,}95$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{3}v_n + 0{,}05 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{3}v_n + 0{,}05 \end{cases}$.

On pose pour tout entier naturel $n$ : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}95 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$, la relation matricielle de récurrence : $U_{n+1} = A\ U_n + C$.

En effet : $A\ U_n + C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{3}v_n + 0{,}05 \\ \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3}v_n + 0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

● **Exemple 3** : Soit une suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_0$ , $u_1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On pose pour tout entier naturel $n$ : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$, la relation matricielle de récurrence : $U_{n+1} = A\ U_n$.

En effet, $A\ U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

### *2) Expression de $U_n$ en fonction de $n$ lorsque $U_{n+1} = A\ U_n$*

***Propriété 1*** : Soit une suite de matrices colonnes $(U_n)$ de taille $p$ telle que pour tout entier naturel $n$, on ait $U_{n+1} = A\ U_n$ où $A$ est une matrice carrée de taille $p$.
Alors, pour tout entier naturel $n$, on a : $U_n = A^n\ U_0$.

*Démonstration* : Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « pour tout $n$ de **N**, $U_n = A^n\ U_0$ »

→ *Initialisation* : $A^n\ U_0 = A^0\ U_0 = I_p \times U_0 = U_0$. Par suite, on a $\mathcal{P}(0)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $k \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors : $U_k = A^k\ U_0$.
$U_{k+1} = A \times U_k = A \times A^k \times U_0 = A^{k+1} \times U_0$. On en déduit que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a alors prouvé :
$\mathcal{P}(0)$ et pour tout $k$ supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$.

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :
pour tout $n$ supérieur ou égal à 0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie
C'est-à-dire : pour tout $n$ de **N**, $U_n = A^n\ U_0$.

*Exemple* : Reprenons le troisième exemple du 1). On souhaite calculer $u_5$ et $u_6$, sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
$U_5 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$ et d'après la propriété précédente, $U_5 = A^5 \times U_0$.

Or $U_5 = A^5 \times U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 63 \end{pmatrix}$, en utilisant la calculatrice.
Par conséquent, $u_5 = 31$ et $u_6 = 63$.

## 2. Limite d'une suite de matrices

### 1) Définition

***Définition 1*** : Une suite de matrices colonnes $(U_n)$ de taille $p$ congerge vers une matrice $L$ si, et seulement si, les coefficients de $(U_n)$ (qui sont des suites réelles) convergent vers les coefficients de $L$ correspondants.
Dans les autres cas, la suite $(U_n)$ diverge.

*Exemple* : Reprenons l'exemple 1 du 1.
$\lim\limits_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^3+1) = +\infty$. Donc la suite $(U_n)$ diverge.

### 2) Propriété

***Propriété 2*** : Soit une suite de matrices colonnes $(U_n)$ de taille $p$ telle que pour tout entier naturel $n$, on ait $U_{n+1} = A\ U_n + C$ où $A$ est une matrice carrée de taille $p$ et $C$ une matrice colonne à $p$ lignes.
Si la suite $(U_n)$ converge, alors sa limite $L$ est une matrice colonne vérifiant l'égalité $L = AL + C$.

*Démonstration* : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} A\ U_n + C = AL + C$.
Par unité des limites, on obtient $L = AL + C$.

*Exemple* : Reprenons l'exemple 2 du 1.
Si la suite $(U_n)$ converge, alors sa limite $L$ sera solution de l'équation matricielle $L = AL + C$.
Résolvons cette équation : $L = AL + C$ équivaut à $L - AL = C$, soit à $(I_2 - A)L = C$.

Donc $L = AL + C$ équivaut à $L = (I_2 - A)^{-1} C$.

Or $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, et, $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $L = (I_2 - A)^{-1} C = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

Donc la suite $(U_n)$ converge vers $L = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

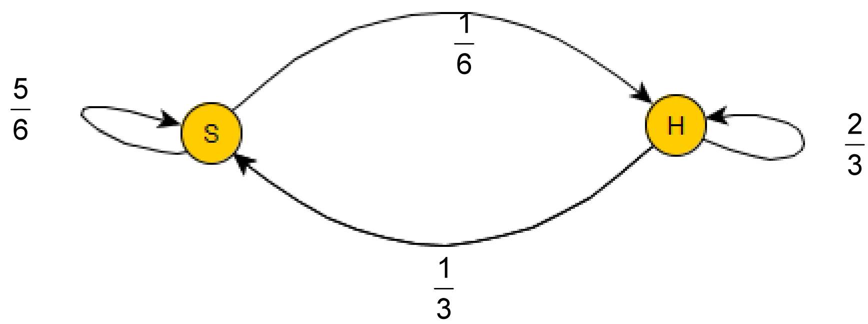
## 3. Graphes et marches aléatoires

### *1) Graphe*

Dans une localité, on suppose que chaque jour, il fait soit sec, soit humide.
On fait l'hypothèse que :

- S'il fait sec un jour, alors il fera encore sec le lendemain avec la probabilité $\frac{5}{6}$.
- S'il fait humide un jour, alors il fera encore humide le lendemain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Un certain dimanche (choisi pour jour 0), il fait sec.
On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.
Pour visualiser la situation, on peut la représenter par le scéma suivant, appelé graphe.




### *2) Marche aléatoire*

On considère la variable aléatoire $X_n$ prenant les valeurs *H* (humide), *S* (sec) à l'étape $n$, c'est-à-dire le jour $n$.
*H* et *S* s'appellent les **états** de $X_n$.
Par exemple, $X_{10} = H$ signifie quil fera humide le 10$^{\text{ème}}$ jour.
La suite de variables aléatoires $(X_n)$ est appelée **marche aléatoire** sur l'ensemble des issues $\{H, S\}$.
Dans une marche aléatoire, l'état du processus à l'étape $n$ + 1 ne dépend que de celui à l'état $n$, mais non de ses états antérieurs.

### *3) Matrice de transition*

On considère la loi de probabilité de $X_n$, appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'il fasse humide ou sec le jour $n$.

***<u>Définition 2</u>*** : La matrice de transition d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$ est la probabilité de transition du sommet $j$ vers le sommet $i$.

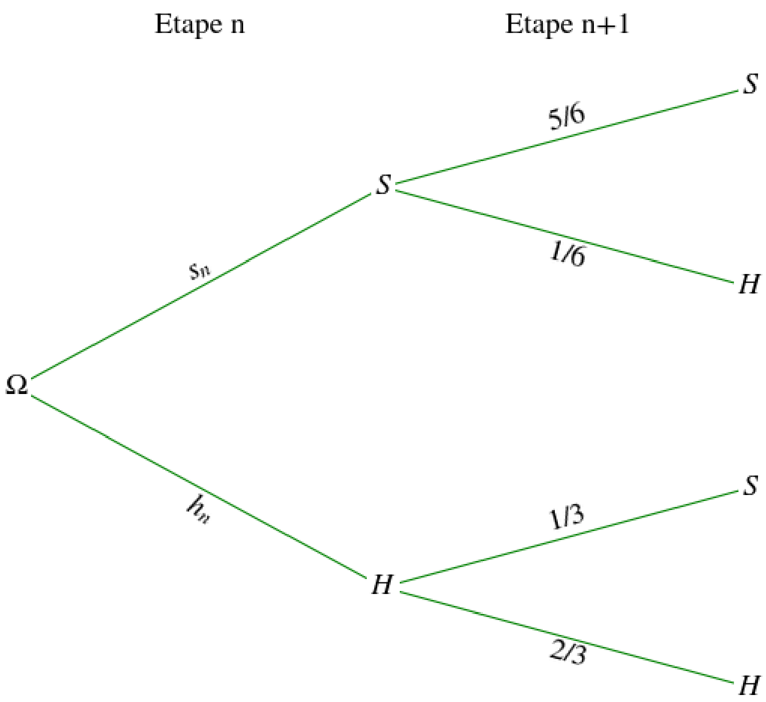
Transition du sommet S vers le sommet H

Dans l'exemple précédent, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Transition du sommet H vers le sommet S

<u>Remarque</u> : La somme des coefficients d'une même colonne d'une matrice de transition est égale à 1.

Pour tout entier naturel $n$, on notera $s_n$ la probabilité qu'il fasse sec le jour $n$, et $h_n$ la probabilité qu'il fasse humide le jour $n$.
L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape $n$ à l'étape $n+1$.




D'après l'arbre pondéré : $s_{n+1} = \frac{5}{6}s_n + \frac{1}{3}h_n$ et $h_{n+1} = \frac{1}{6}s_n + \frac{2}{3}h_n$.

Si on note $U_n = \begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix}$, on a $U_{n+1} = M\ U_n$.

D'après la propriété 1, on en déduit que, pour tout entier $n$, $U_n = M^n\ U_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,667 & 0,666 \\ 0,333 & 0,334 \end{pmatrix}$. Par suite, $U_{10} \approx \begin{pmatrix} 0,667 \\ 0,333 \end{pmatrix}$.

Ce qui signifie qu'au dixième jour, la probabilité qu'il fasse sec est d'environ 0,667.

### *4) Etude asymptotique d'une marche aléatoire*

***Définition 3*** : On dit qu'une marche aléatoire de matrice de transition $M$ est convergente si la suite des matrices colonnes $(U_n)$ des états de la marche aléatoire converge.

Si la suite $(U_n)$ des états d'une marche aléatoire convergente vérifie la relation $U_{n+1} = M\ U_n$, alors la limite $L$ de cette suite définit un état stable, solution de l'équation $L = M\ L$.

Soit $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On remarque que $M\ X = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{18} + \frac{1}{9} \\ \frac{2}{18} + \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = X$.

Donc l'état stable est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

*Remarque* : Cette méthode ne prouve pas que la marche aléatoire est convergente.
En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.