NOMBRES PREMIERS

Cours	Terminale S

1. Définition et propriétés

1) Définition

Définition 1 : Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 1 n'est pas premier. 2 est premier : c'est le plus petit nombre premier, et c'est le seul qui soit pair.
Les nombres premiers inférieurs à 50 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 et 47.

Dans les années 1950 le géologue belge Jean de Heinzelin de Braucourt découvrit ces ossements dans des couches de cendres volcaniques au bord du lac Édouard dans la région d'Ishango au Congo belge (aujourd'hui République démocratique du Congo), près de la frontière ougandaise.
Il s'agit de deux os d'approximativement 10 cm et 14 cm, provenant d'animaux non identifiés (on pense à des os humains, de singe ou de lion). Ces os portent plusieurs incisions sur chacune de leurs faces. Le plus petit porte plusieurs incisions, organisées en groupes de trois colonnes. La colonne de gauche peut être divisée en 4 groupes. Chaque groupe possède respectivement 19, 17, 13 et 11 entailles. Ce sont les quatre nombres premiers successifs compris entre 10 et 20.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Os_d'Ishango

2) Propriété

Propriété 1 : Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur p premier tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

Démonstration : • Soit n un entier strictement supérieur à 1.
→ Si n est premier, il admet lui-même comme diviseur premier.
→ Si n est composé, il admet d'autres diviseurs que 1 et n : soit p le plus petit d'entre eux.
Alors, p est premier ; sinon, il serait composé et il admettrait un diviseur d tel que $1 < d < p$; mais d serait alors un diviseur de n plus petit que p, ce qui est impossible. Donc, p est premier et n admet p comme diviseur premier.

• On peut écrire que $n = p \times q$ avec $p \leq q$ car p est le plus petit élément de l'ensemble des diviseurs de n autre que 1 et n.
En multipliant cette inégalité par p, on obtient : $p \times p \leq q \times p$, c'est-à-dire $p^2 \leq n$.
On en déduit que : $p \leq \sqrt{n}$.

Exemple : *247 est-il premier ?*

Comme $\sqrt{247} \approx 15{,}7$, il suffit d'examiner si 247 est divisible par 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Puisque 247 est pas divisible par 13, alors 247 n'est pas un nombre premier.

Voici un programme qui permet de déterminer si un nombre N est premier.
On teste si *N* est divisible par 2, puis on teste les diviseurs impairs par ordre croissant tant que ceux-ci soient inférieurs à $\sqrt{N}$.

```
Variables : N, I   entiers
Entrées et initialisation
  | Lire N
  | 2 → I
Traitement
  | si E(N/I) = N/I alors
  |   | Afficher N , "divisible par :" ,
  |   | I
  |   | Stop
  | fin
  | I + 1 → I
  | tant que I ⩽ √N faire
  |   | si E(N/I) = N/I alors
  |   |   | Afficher N , "divisible
  |   |   | par :" , I
  |   |   | Stop
  |   | fin
  |   | I + 2 → I
  | fin
Sorties : Afficher N , "est premier"
```

3) Infinité des nombres premiers

Théorème 1 : Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers. Soit p le plus grand d'entre eux et soit N le produit de tous ces nombres premiers : $2 \times 3 \times 5 \times ... \times p$.

Soit à présent l'entier $N' = N + 1$: le reste de la division euclidienne de N' par 2, 3, 5, … ou p est 1, donc N' n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 5, …, p.
→ Si N' est premier, il est supérieur à p, ce qui est absurde.
→ Si N' n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier qui est supérieur à p, ce qui est absurde.

2. Décomposition et diviseurs d'un entier

1) Décomposition en facteurs premiers

Théorème 2 **(théorème fondamental de l'arithmétique)** (admis) :
Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.
On note $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_m^{\alpha_m}$ avec p_1, p_2, ..., p_m des nombres premiers distincts et α_1, α_2, ..., α_m des entiers naturels non nuls.

Exemple : *Décomposer en facteurs premiers le nombre 924.*

On teste comme diviseurs les nombres premiers successifs 2, 3, 5, …
On obtient : $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$.

2) Diviseurs d'un entier

Théorème 3 (admis) : Soit un entier naturel n, supérieur ou égal à 2, dont la décomposition en facteurs premiers est $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$.
Tout diviseur d de n admet une décomposition en produit de facteurs premiers de la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_m^{\beta_m}$, avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$.
Le nombre de diviseurs de n est alors égal à $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_m + 1)$.

Exemple : $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$ alors $2^1 \times 3^0 \times 7^0 \times 11 = 22$ est un diviseur de 924.

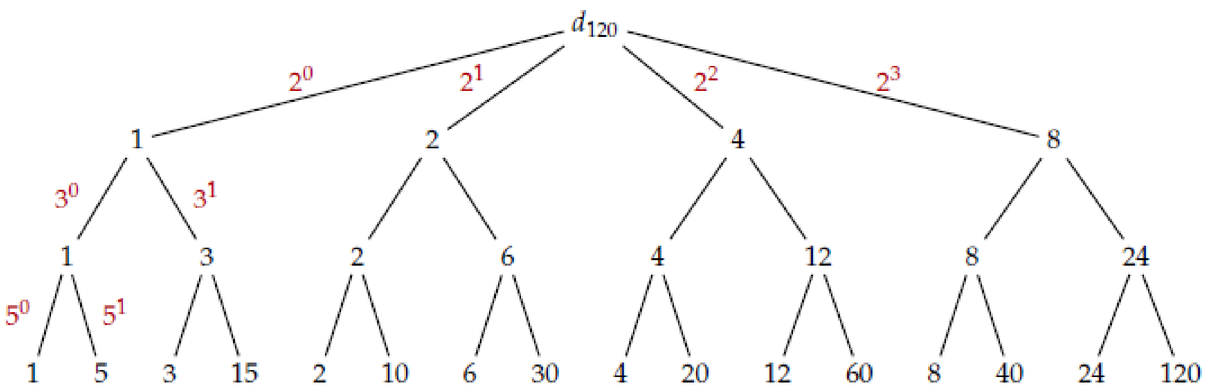
3) Applications

a) Application 1

Trouver le nombre de diviseurs de 120 puis déterminer tous ces diviseurs.

On décompose 120 en produit de facteurs premiers : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.
Or $(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16$; donc **120 admet 16 diviseurs**.

On construit un arbre donnant tous les cas possibles :



Les diviseurs de 120 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 60 et 120.

b) Application 2

Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.

L'entier n a 15 diviseurs. Il faut donc connaître toutes les décompositions de 15 en facteurs supérieurs à 1 ; or $15 = 1 \times 15 = (0+1) \times (14+1)$ ou $15 = 3 \times 5 = (2+1) \times (4+1)$.
Comme n est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et par 3. Par suite, n admet 2 facteurs premiers, et, comme 15 ne peut se décomposer en plus de 2 facteurs, alors n ne peut admettre que deux facteurs premiers 2 et 3.
D'où : $n = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2}$ avec $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 4$ ou $\alpha_1 = 4$ et $\alpha_2 = 2$.
De plus que n n'est pas divisible par 8, qui est égal à 2^3 ; par suite, $\alpha_1 < 3$.
Par conséquent, $\boldsymbol{n} = 2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = \mathbf{324}$.