Liban _ Terminale S spécialité

1) Une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport k, et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.
Or :

- le rapport de s est égal à $\left|\frac{3}{2}(1-i)\right| = \frac{3}{2}\times|1-i| = \frac{3}{2}\times\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;
- la mesure de l'angle θ est l'argument de $\frac{3}{2}(1-i)$.

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{3}{2}(1-i)\right) &= \arg\left(\frac{3}{2}\right) + \arg(1-i) + 2k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})\\ &= 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})\\ &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})\end{aligned}$$

- le point Ω est un point invariant par s : résolvons l'équation $z' = z$.

$$\begin{aligned} z'=z \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = z\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i = z\\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z = -4 + 2i\\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-4+2i}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i} = \frac{-2(2-i)}{\frac{1}{2}(1-3i)} = -4\times\frac{(2-i)(1+3i)}{1^2+(-3)^2} = -\frac{4}{10}\times(2+6i-i+3) = -2-2i\end{aligned}$$

D'où Ω a pour affixe $-2-2i$.

La proposition 1 est alors VRAIE.

2) ➢ Si $n=1$, alors $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 78141$, qui n'est pas divisible par 5.
La proposition 2 est alors FAUSSE.

➢ $5^{6n+1} = \left(5^6\right)^n \times 5$. Or $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, alors $\left(5^6\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$, c'est-à-dire $\left(5^6\right)^n \equiv 1 \pmod 7$. Donc $5^{6n+1} \equiv 1\times 5 \pmod 7$.

$2^{3n+1} = \left(2^3\right)^n \times 2$. Or $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, alors $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$, c'est-à-dire $\left(2^3\right)^n \equiv 1 \pmod 7$. Donc $2^{3n+1} \equiv 1\times 2 \pmod 7$.

Par suite, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 5 + 2 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$. On en déduit que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7, pour tout entier naturel n.
La proposition 3 est alors VRAIE.

3) Le couple $(14\ ;\ 28)$ est un couple solution de l'équation $11x - 5y = 14$.
Alors, $11x - 5y = 14$ équivaut à $11x - 5y = 11\times(14) - 5\times(28)$, ou encore à $11(x-14) = 5(y-28)$.

On en déduit que 5 divise $11(x-14)$, et comme 5 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x-14$. Il existe donc un entier k tel que $x-14=5k$, c'est-à-dire $x=14+5k$. En remplaçant x par $14+5k$ dans l'égalité $11(x-14)=5(y-28)$, on a : $11\times 5k=5(y-28)$, soit $y-28=11k$, c'est-à-dire $y=28+11k$.
Réciproquement, on vérifie que tous les couples de la forme $(14+5k\ ;\ 28+11k)$, où k appartient à **Z**, sont solutions de l'équation $11x-5y=14$.
$11(14+5k)-5(28+11k)=154-140=14$. Ce qui vérifie ce que l'on souhaite.
Par conséquent, **l'ensemble de solutions de l'équation $11x-5y=14$ est l'ensemble des couples de la forme $(14+5k\ ;\ 28+11k)$, où k appartient à Z**.
La proposition 4 est alors VRAIE.

4) ➢ Soit (P) le plan d'équation $x=\lambda$.

$$M(x\ ;y\ ;z)\in(P)\cap\Sigma \iff \begin{cases} x^2+y^2=z \\ x=\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} z=y^2+\lambda^2 \\ x=\lambda \end{cases}$$

On en déduit que la section de Σ et du plan (P) d'équation $x=\lambda$ est une hyperbole d'équation $z=y^2+\lambda^2$, tracée dans le plan.
La proposition 5 est alors FAUSSE.

➢ Soit $(\mathscr{H})$ le solide délimité par Σ et par le plan d'équation $z=9$.
- Cherchons la section de $(\mathscr{H})$ par le plan (Q) d'équation $z=k$, avec $k\in[a\ ;b]$.

$$M(x\ ;y\ ;z)\in(Q)\cap\Sigma \iff \begin{cases} x^2+y^2=z \\ z=k \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=k \\ z=k \end{cases}.$$

Alors, la section de $(\mathscr{H})$ par le plan (Q) d'équation $z=k$, avec $k\in[a\ ;b]$, est un disque de rayon $\sqrt{k}$, qui admet pour aire $S(k)=\pi\times\left(\sqrt{k}\right)^2=\pi k$.

- Calculons le volume de $(\mathscr{H})$: $V_{(\mathscr{H})}=\int_0^9 S(k)dk=\int_0^9 \pi k\ dk=\left[\frac{\pi k^2}{2}\right]_0^9=\frac{81\pi}{2}$.

- Soit $(\mathscr{C})$ le solide délimité par Σ et par le plan d'équation $z=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Calculons le volume de $(\mathscr{C})$: $V_{(\mathscr{C})}=\int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} S(k)dk=\int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} \pi k\ dk=\left[\frac{\pi k^2}{2}\right]_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(81\times\frac{2}{4}\right)\pi}{2}=\frac{81\pi}{4}$.

- On en déduit alors que $V_{(\mathscr{C})}=\frac{1}{2}V_{(\mathscr{H})}$; **la proposition 5 est alors VRAIE**.