

1) Si $M(x ; y ; z)$ appartient à (S) , alors on a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, où x, y et z sont des réels. Alors $x^2 + y^2 - (-z)^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x ; y ; -z)$ appartient également à (S) .

On montre de même la réciproque : si le point $M(x ; y ; -z)$ appartient à (S) , le point $M'(x ; y ; z)$ appartient aussi à (S) .

Par conséquent, **le plan d'équation $z = 0$, c'est-à-dire le plan (xOy) , est un plan de symétrie de la surface (S) .**

$$2) a) \quad M(x ; y ; z) \in (D) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AM} = k\overline{AB} \quad \text{où } k \text{ est un réel}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -4k \\ y - 1 = 0k \\ z + 3 = 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k + 3 \\ y = 1 \\ z = 4k - 3 \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbf{R}$$

Donc $\begin{cases} x = -4k + 3 \\ y = 1 \\ z = 4k - 3 \end{cases}$, avec $k \in \mathbf{R}$, est une représentation paramétrique de la droite (D) .

b) Soit $M(x ; y ; z)$ un point de la droite (D) . D'après la question précédente,

$$x^2 + y^2 - z^2 = (-4k + 3)^2 + 1^2 - (4k - 3)^2 = 16k^2 - 24k + 9 + 1 - 16k^2 + 24k - 9 = 1.$$

On en déduit alors que ce point M appartient à (S) , ou encore que tout point de (D) appartient à (S) . Par conséquent, **la droite (D) est incluse dans la surface (S) .**

3) Soit \mathcal{P} un plan parallèle au plan (xOy) . \mathcal{P} a alors une équation de la forme $z = c$, où c est un réel.

$$M(x ; y ; z) \in (S) \cap \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - c^2 = 1 \\ z = c \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 + 1 \\ z = c \end{cases}$$

Or $x^2 + y^2 = c^2 + 1$ est une équation d'un cercle de centre $\Omega(0 ; 0 ; c)$ et de rayon $\sqrt{1 + c^2}$, tracé dans \mathcal{P} . Donc, **la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle.**

4) a) Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$.

D'après la question précédente, **(C) est le cercle $\Omega(0 ; 0 ; 68)$ et de rayon**

$$\sqrt{1 + 68^2} = 5\sqrt{185}, \text{ tracé dans le plan d'équation } z = 68.$$

b) Soit $(a ; b)$ une solution de (1). Alors :

$$\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}$$

Soit d le PGCD de a et b . Alors d divise a (et aussi a^2) et divise b (et aussi b^2), d'où d divise $a^2 + b^2$, c'est-à-dire d divise 4625.

De plus, d divise le PPCM de a et b . Donc d divise 440.

Par suite, d est un diviseur commun de 440 et de 4625.

Or les diviseurs de 4625 sont : 1 ; 5 ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.

Les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440. Donc, d est égal à 1 ou à 5.

Par conséquent, **si $(a ; b)$ est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a ; b)$ est égal à 1 ou 5.**

• Supposons que $d = 1$; alors $ab = \text{pgcd}(a ; b) \times \text{ppcm}(a ; b)$, c'est-à-dire

$$ab = 1 \times 440 = 440 .$$

On en déduit que a et b sont des diviseurs de 440 dont la somme de « leurs carrés » est égale à 4625 et le produit à 440.

Or $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 880 = 5505$; ce qui est impossible car $a + b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels).

Il n'y a donc dans ce cas aucun couple solution de ce système.

• Supposons que $d = 5$; alors $ab = \text{pgcd}(a ; b) \times \text{ppcm}(a ; b)$, c'est-à-dire

$$ab = 5 \times 440 = 2200 .$$

On en déduit que a et b sont des diviseurs de 440 dont la somme de « leurs carrés » est égale à 4625 et le produit à 2200.

Or $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 4400 = 9025$; d'où : $a + b = 95$.

De plus les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440. Donc, seul le couple $(40 ; 55)$ est solution de ce système dans ce cas.

Par conséquent, **il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a ; b) = 440$.**