CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 9	
Probabilités et suites	***Pour le 5 mars 2008***

Exercice donné au BAC, lors de la session de juin 2002, en France

1) a) Si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$. Alors $\boldsymbol{p_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}}$.

Si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$. Alors $\boldsymbol{p_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{5}}$.

b) • $\boldsymbol{p(A_{n+1} \cap A_n)} = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) \boldsymbol{= \frac{1}{5} p_n}$.

$\boldsymbol{p(A_{n+1} \cap B_n)} = p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) \boldsymbol{= \frac{2}{5} q_n}$.

• A_n et B_n forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, $p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n)$. Or $p(A_{n+1}) = p_{n+1}$ et

$q_n = p(B_n) = p(\overline{A_n}) = 1 - p(A_n) = 1 - p_n$. Alors $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{2}{5}(1 - p_n) = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) p_n$.

On en déduit que : $\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} p_n}$ **, pour tout entier naturel n non nul**.

2) Soit n un entier naturel non nul.

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5} p_n + \frac{6-5}{15} = -\frac{1}{5} p_n + \frac{1}{15} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$

Donc, $u_{n+1} = -\frac{1}{5} u_n$, pour tout entier naturel non nul n.

Par conséquent, $(\boldsymbol{u_n})$ **est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $\boldsymbol{u_1 = \frac{1}{6}}$**.

b) D'après la question précédente, on en déduit que, **pour tout entier naturel non nul n,**

$\boldsymbol{u_n} = u_1 \times q^{n-1} \boldsymbol{= \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$.

Comme $p_n = u_n + \frac{1}{3}$, alors **pour tout entier naturel non nul n,** $\boldsymbol{p_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}}$.

$\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{\left(-\frac{1}{5}\right)} = (-5)\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Comme $-1 < -\frac{1}{5} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$; d'où

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$. On en déduit que **la suite (p_n) est convergente** et que $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{3}}$.