CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1

Matrices	*Pour le 10 octobre 2007*

Exercice 1

• **Le système** $(S)\begin{cases} 3x-2y+z=17 \\ x-3z=-51 \\ 3y+2z=-34 \end{cases}$ **se traduit par une égalité matricielle de la forme**

***AX = B*, avec** $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix} 17 \\ -51 \\ -34 \end{pmatrix}$.

• À l'aide de la calculatrice, on obtient : $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{9}{34} & \frac{7}{34} & \frac{3}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{3}{34} & -\frac{9}{34} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$.

On sait que : $AX = B$ équivaut à $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$, c'est-à-dire à $(A^{-1}A)X=A^{-1}B$, ou encore à $\mathcal{I}_3X=A^{-1}B$. D'où : $AX = B$ équivaut à $X=A^{-1}B$.

Par conséquent, $\begin{cases} x=\frac{9}{34}\times 17+\frac{7}{34}\times(-51)+\frac{3}{17}\times(-34)=\frac{9}{2}-\frac{21}{2}-6=-12 \\ y=-\frac{1}{17}\times 17+\frac{3}{17}\times(-51)+\frac{5}{17}\times(-34)=-1-9-10=-20 \\ z=\frac{3}{34}\times 17-\frac{9}{34}\times(-51)+\frac{1}{17}\times(-34)=\frac{3}{2}+\frac{27}{2}-2=13 \end{cases}$.

On en déduit que $\mathscr{S}=\{(\mathbf{-12},\ \mathbf{-20},\ \mathbf{13})\}$.

Exercice 2

1) Les matrices des coordonnées homogènes des points $C(5\ ;\ 2)$ et $D(3\ ;\ 6)$ sont respectivement $\boldsymbol{C}=(\mathbf{5}\quad\mathbf{2}\quad\mathbf{1})$ et $\boldsymbol{D}=(\mathbf{3}\quad\mathbf{6}\quad\mathbf{1})$.

2) a)

•

$$\begin{aligned}(x_{A'}\quad y_{A'}\quad 1) &= (-5\quad 2\quad 1)\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-5\times1+2\times0+1\times3 \qquad -5\times0+2\times1+1\times(-2) \qquad -5\times0+2\times0+1\times1) \\ &= (-2\quad 0\quad 1)\end{aligned}$$

Par conséquent, **le point A' a pour coordonnées cartésiennes $(-2\ ;\ 0)$**.

C. Lainé

- $\begin{pmatrix} x_{B'} & y_{B'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent, **le point B' a pour coordonnées cartésiennes $(0\ ;\ -4)$**.

- $\begin{pmatrix} x_{C'} & y_{C'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

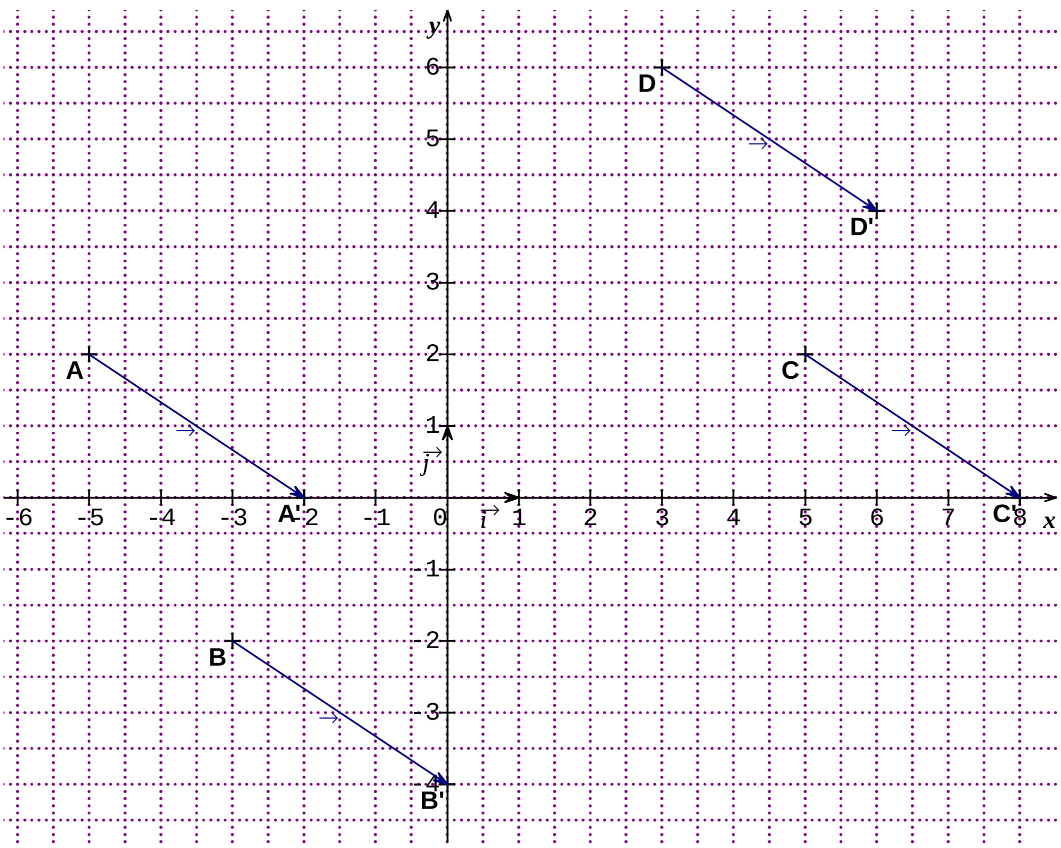
Par conséquent, **le point C' a pour coordonnées cartésiennes $(8\ ;\ 0)$**.

- $\begin{pmatrix} x_{D'} & y_{D'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent, **le point C' a pour coordonnées cartésiennes $(6\ ;\ 4)$**.

b)



Il semble que ***t*** **soit une translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(3\ ;\ -2)$**.

c) Soit $N(a\ ;\ b)$ un point du plan, alors la matrice de ses coordonnées homogènes est $N = \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix}$.

Soit N' l'image du point N par la transformation t, alors on en déduit que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{N'} & y_{N'} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} a+3 & b-2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc le point N' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+3 & b-2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, **le vecteur $\overrightarrow{NN'}$ a pour coordonnées** $\begin{pmatrix} a+3-a & b-2-b \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\mathbf{(3\ ;\ -2)}$.

On en déduit que $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$, et par suite, ***t* soit une translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(3\ ;\ -2)$**.