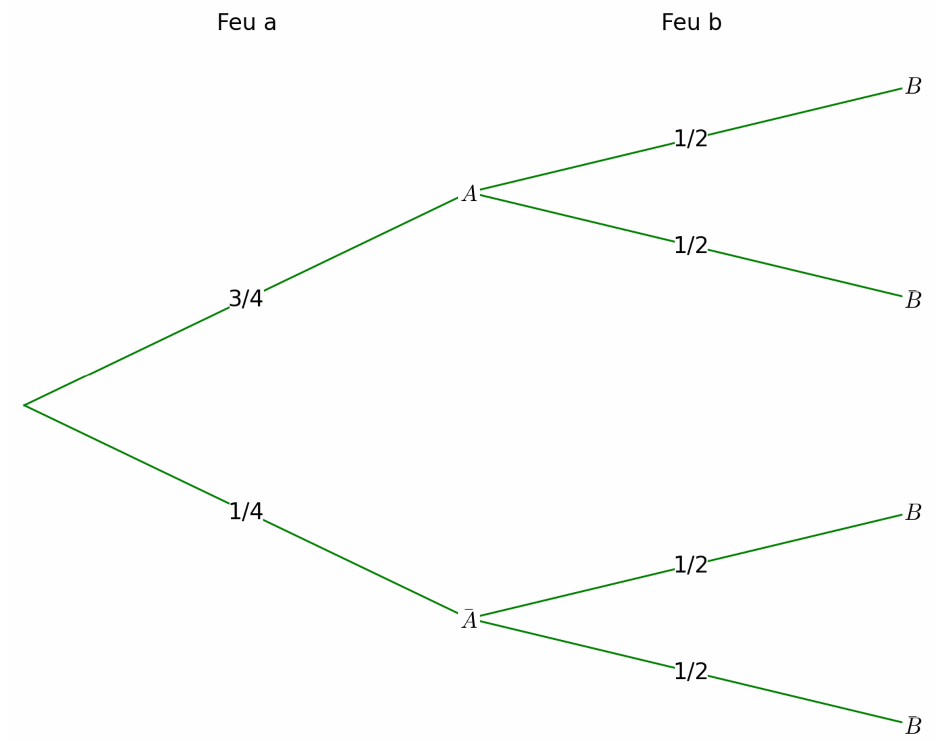
Partie I



1) La probabilité que les deux feux soient verts à son passage est égale à $p(A \cap B)$.

D'après l'arbre pondéré ci-dessus, $p(A \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Donc, **la probabilité que les deux feux soient verts à son passage est égale à $\frac{3}{8}$**.

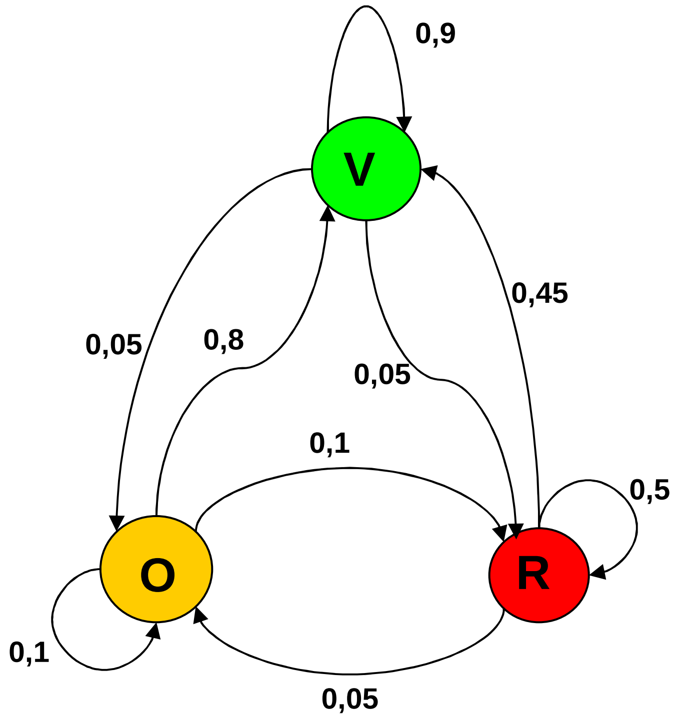
2) Calculons la probabilité qu'il ne rencontre aucun feu vert à son passage, c'est-à-dire calculons $p(\overline{A} \cap \overline{B})$. Or $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

D'où, la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert à son passage est égale à $1 - p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Par conséquent, **la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert à son passage est égale à $\frac{7}{8}$**.

Partie II

1) a) Notons V : « le feu est vert »; O : « le feu est orange » ; R : « le feu est rouge ».



b) Les sommets V, O, R étant rangés dans cet ordre, alors **la matrice M de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$**.

2) a) Si le premier feu rencontré est vert, alors **la matrice P_1 de l'état initial est** :

$$\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

La matrice P_2 est déterminée par : $P_2 = P_1 M$. D'où : $\boldsymbol{P_2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \end{pmatrix}}$.

b) Déterminons l'état probabiliste du 4$^{\text{ème}}$ feu : $\boldsymbol{P_4} = P_3 M = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 0,859 & 0,0525 & 0,0885 \end{pmatrix}}$.

Donc **la probabilité que le 4$^{\text{ème}}$ feu soit vert, sachant que le 1$^{\text{er}}$ feu était vert, est égale à 0,859**.

3) Si le premier feu rencontré est rouge, alors **la matrice P_1 de l'état initial est** :

$$\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

La matrice P_2 est déterminée par : $P_2 = P_1 M$. D'où : $\boldsymbol{P_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}}$.

4) On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,10 \end{pmatrix}$.

Donc, **quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, au bout d'un grand nombre de feux rencontrés, la probabilité que le feu soit vert est égale à 0,85, celle que le feu soit orange est égale à 0,05, et celle que le feu soit rouge est égale à 0,1**.