Liban _ Terminale ES spécialité

1) Le point N appartient à la surface, alors $z_N = \ln(y_N) + 2\ln(x_n)$.

D'où : $2\ln(x_n) = z_N - \ln(y_N)$, c'est-à-dire $\ln(x_n) = \frac{1}{2}(z_N - \ln(y_N))$.

Alors $\ln(x_n) = \frac{1}{2}(\ln 30 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{30}{5}\right) = \frac{1}{2}\ln 6 = \ln\left(\sqrt{6}\right)$ car $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ et

$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$. Par conséquent, $\boldsymbol{x_n = \sqrt{6}}$.

2) a) Si la consommatrice décide de ne pas dépenser plus de 36 euros par mois pour ces fruits, on en déduit la relation suivante : $\mathbf{3x + 2y = 36}$.

b) D'après la question précédente, on en déduit que : $2y = 36 - 3x$, c'est-à-dire $y = 18 - \frac{3}{2}x$.

D'où : $f(x\,;y) = \ln\left(18 - \frac{3}{2}x\right) + 2\ln x$. Par conséquent, **le niveau de satisfaction de la consommatrice est égal à** $\boldsymbol{f(x\,;y) = \ln(18 - 1{,}5x) + 2\ln x}$.

c) La fonction g s'écrit sous la forme $g = \ln u + 2v$, avec $u(x) = 18 - 1{,}5x$ et $v(x) = \ln x$.
La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[1\,;10]$ et la fonction v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc sur $[1\,;10]$; on en déduit que la fonction g est dérivable sur $[1\,;10]$.
Soit x un réel de $[1\,;10]$. $g' = \frac{u'}{u} + 2v'$, avec $u'(x) = -1{,}5$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.
Donc, pour tout réel x de $[1\,;10]$, $g'(x) = \frac{-1{,}5}{18 - 1{,}5x} + \frac{2}{x} = \frac{-1{,}5x + 36 - 3x}{x(18 - 1{,}5x)} = \frac{-4{,}5x + 36}{x(18 - 1{,}5x)}$.
Comme $x > 0$ et $18 - 1{,}5x > 0$ pour tout x de $[1\,;10]$, le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-4{,}5x + 36$. Or :

- $-4{,}5x + 36 = 0 \iff -4{,}5x = -36 \iff x = \frac{36}{4{,}5} = 8$;
- $-4{,}5x + 36 < 0 \iff -4{,}5x < -36 \iff x > 8$;
- $-4{,}5x + 36 > 0 \iff -4{,}5x > -36 \iff x < 8$.

Donc, la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;8]$ et strictement décroissante sur $[8\,;10]$. Par conséquent, **la fonction $\boldsymbol{g}$ admet un maximum atteint pour $\boldsymbol{x_0 = 8}$**.

d) D'après la question précédente, le maximum de la fonction g est atteint pour $x = 8$.
Sous la contrainte $3x + 2y = 36$, la quantité y en kilos de fruits $\mathscr{B}$ est solution de

$3 \times 8 + 2y = 36$, ce qui équivaut à $y = \frac{36 - 24}{2} = 6$.

Par conséquent, **la consommatrice doit acheter 8 kilos de fruits $\mathscr{A}$ et 6 kilos de fruits $\mathscr{B}$ si elle veut optimiser son niveau de satisfaction tout en respectant sa contrainte de budget**.